جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج



سلسلة كتب الرياضيات للمرحلة المتوسطة



للصف الثالث المتوسط

تنقيح لجنة متخصصة في وزارة التربية

الطبعة الرابعة المنقحة

١٤٤٥هـ / ٢٠٢٣ م

بُنِيتْ وصُمِّمَتْ (سلسلةُ كُتُبِ الرّياضيّاتِ للمرحلةِ المتوسطةِ) على أيـــدي فريقٍ من المتخصّصين في وزارةِ التّربيةِ / المديريةُ العامةُ للمناهـجِ وبِمشاركةِ متخَصّصينَ من أساتذةِ الجامعاتِ في وزارةِ التّعليمِ العالي والبحثِ العلمي على وفقِ المعاييرِ العالميةِ لِتُحقِّقَ أهدافَ بناءِ المنهجِ الحديثِ المتمثِّلةِ في جعلِ الطّلابِ:

- مُتعلِّميـنَ ناجحيـنَ مـدى الحيـاةِ.
- أفـراداً واثقيـنَ بأنفُسِهـم.
- مواطنينَ عراقيينَ يشعُرونَ بالفَخرِ.

المشرفُ العلميُّ على الطّبع
م. م. مروة فليح حسن

المشرفُ الفنيُّ على الطّبع
م.م ياسر منذر محمد سعيد حبه





المقدمة

تُعَدُّ مادةُ الرياضياتِ مِنَ الموادِ الدراسيةِ الأساسيةِ التي تُساعدُ الطالبَ على اكتسابِ الكفاياتِ التعليمية اللازمةِ لهُ، لتنميةِ قُدراتهِ على التفكيرِ وَحلّ المشكلاتِ، ويساعدهُ على التعاملِ مع المواقفِ الحياتيةِ المختلفةِ.

وَمنْ مُنطَلَقِ الاهتمامِ الذي تُوليهِ وزارةُ التربيةِ متمثلةً بالمديريةِ العامةِ للمناهجِ لتطويرِ المناهج بصورةٍ عامة ولاسيّما مناهجِ الرياضياتِ لكي تواكبَ التطوراتِ العلميةَ والتكنولوجيةَ في مجالاتِ الحياةِ المختلفة، فَقَدْ وُضِعت خطةٌ لتأليفِ سلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ للمراحلِ الدراسيةِ الثلاثِ، وأُنجزتْ منها كتبُ المرحلةِ الابتدائيةِ وَبَدأ العملُ على استكمالِ السلسلةِ بتأليفِ كتبِ المرحلةِ المتوسطةِ.

إنّ سلسلةَ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ الجديدةِ ومن ضمن الإطارِ العام للمناهج تُعززُ القيمَ الأساسيةَ التي تتمثلُ بالالتزامِ بالهويةِ العراقيةِ والتسامحِ واحترامِ الرأي والرأي الآخر والعدالةِ الاجتماعية، وتوفيرِ فرصٍ متكافئةٍ للتميز والإبداع، كما تعملُ على تعزيزِ كفاياتِ التفكيرِ والتعلّمِ والكفاياتِ الشخصيةِ والاجتماعية وكفاياتِ المواطنةِ والعملِ.

بُنِيَتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ على محوريةِ الطالب في عمليتَي التعليمْ والتعَلُمْ وَعدةُ المحورَ الرئيسَ في العمليةِ التربويةِ على وفقِ المعاييرِ العالميةِ.

تميزَتْ سلسلةُ كتبِ الرياضياتِ العراقيةِ للمرحلةِ المتوسطةِ في تنظيمِ الدروسِ على ستِ فقراتٍ: تعَلَّمْ ، تأكدْ من فِهمِكَ ، تدرّبْ وَحِلّ التمرينات، تدرّبْ وحِلّ مسائلَ حياتيةً ، فَكِّرْ ، أُكتبْ.

يأتي كتابُ الرياضياتِ للصفِ الثالث المتوسطِ مشتملاً على أربعة محاور أساسية: محورُ الأعدادِ والعملياتِ ، ومحورُ الجبرِ، ومحور الهندسة والقياسِ ، ومحورُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ من ضِمن الأوزان النسبية لكل محور، وتضَمَّنَ الكتابُ ستة فصولٍ ولكلِّ فصلٍ تمريناته.

تتميّزُ هذهِ الكتبُ بأنها تعرضُ المادةَ بأساليبَ حديثةٍ، تتوفرُ فيها عناصرُ الجذبِ والتشويقِ، التي تُساعدُ الطالبَ على التفاعلِ معها، عن طريق ما تُقدمهُ من تدريباتٍ وتمريناتٍ ومسائلَ حياتيةٍ، إضافةً إلى ذلك وُضِعَت تمريناتُ الفصولِ في نهايةِ الكتابِ وهي تَخْتلفُ عن التدريباتِ والتمريناتِ في الدروسِ وذلك لكونِها موضوعية فالإجابة عنها تكون عن طريق اختيارٍ من متعدّدٍ وهذا بدورهِ يهيِّئ الطالبَ للمشاركةِ في المسابقاتِ الدوليةِ.

يمثلُ هذا الكتابُ امتداداً لسلسلةِ كُتبِ الرياضياتِ المطوّرةِ للمرحلةِ الابتدائيةِ ودعامةً من دعائمِ المنهجِ المطوّرِ في الرياضياتِ إلى جانبِ دليلِ المدرّسِ، وعليه نأملُ أنْ يُسْهِمَ تنفيذُها في اكتسابِ الطّلابِ المهاراتِ العلميةِ والعمليةِ وَتنميةِ ميولِهم لدراسةِ الرياضيات.

اللّهمّ وفّقْنا لخدمةِ عراقِنا العزيزِ وأبنائِهِ ...

المؤلفون

الفصلُ 1

العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية
Relations and Inequalities in Real Numbers



تتحركُ موجةُ التسونامي في البحار العميقة بسرعة فائقة، لكنها حين تصل إلى الشاطئ تزداد سرعتها تحت تأثير طاقتها الهائلة وتضربُ الشاطئَ بقوةٍ مخلفةً دمار شامل. ويمكن حساب سرعة التسونامي بالقانون $v = \sqrt{9.6d}$ متر في الثانية، حيث d تمثل عمق الماء بالمتر .

Pretest الاختبارُ القبليّ

صنّف العددَ من حيث كونه عدداً نسبياً أو غير نسبيّ:

1. $\sqrt{25}$
2. $\sqrt{7}$
3. $\frac{0}{\sqrt{3}}$
4. $\sqrt{\frac{16}{25}}$
5. $\sqrt{\frac{49}{5}}$
6. $\frac{30}{4}$
7. $-6\frac{3}{2}$
8. $-\sqrt{8}$

قدّر الجذورَ التربيعيةَ التالية بالتقريب لأقربِ عُشرٍ، ثم مثّلها على مستقيمِ الأعداد:

9. $\sqrt{2} \approx .....$
10. $-\sqrt{3} \approx .....$
11. $\sqrt{\frac{6}{25}} \approx .....$
12. $\sqrt{\frac{81}{49}} \approx .....$

قارن بين الأعداد الحقيقية مستعملاً الرموز (< ، > ، =):

13. $\sqrt{5}$ ☐ $2\frac{1}{3}$
14. 1.25 ☐ $\sqrt{2.25}$
15. $\sqrt{\frac{0}{3}}$ ☐ $\frac{0}{6}$
16. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ ☐ $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

17. رتّب الأعداد من الأصغر إلى الأكبر : $\sqrt{7}$, 2.25 , $\sqrt{5}$
18. رتّب الأعداد من الأكبر إلى الأصغر : $-3\frac{1}{5}$, $-\frac{7}{3}$, -3.33

حلّ المتباينات التالية في R باستعمال خواص المتباينات على الأعداد الحقيقية:

19. $3x + \frac{2}{5} \geq 4x - \frac{3}{5}$
20. $\frac{3}{7} > z - \frac{9}{14}$
21. $\frac{3y}{8} \geq \frac{2}{7}$
22. $\frac{-4m}{11} < \frac{9}{22}$
23. $6(z - 3) > 5(z + 1)$
24. $4\left(\frac{1}{2}v + \frac{3}{8}\right) > 0$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

25. $\sqrt{2}(1 - \sqrt{18}) =$ ....
26. $3\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} =$ ....
27. $\frac{\sqrt{7} - 8\sqrt{7}}{2\sqrt{7}} =$ ....
28. $\frac{6\sqrt{44}}{\sqrt{5}} \div \frac{18\sqrt{11}}{\sqrt{5}}$

الدرسُ [1-1]

ترتيبُ العملياتِ في الأعدادِ الحقيقيةِ
Ordering Operations in Real Numbers

فكرةُ الدرس
- تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية باستعمال ترتيب العمليات.

المفردات
- العددُ الحقيقيُّ
- تنسيبُ (تجذير) المقامِ
- المرافقُ

تعلم

يُعد زلزال تسونامي الذي حدث في اليابان عام 2011 من أقوى الزلازل التي حدثت على مرّ العصور. وتحسب سرعة التسونامي بالقانون $v=\sqrt{9.6d}$ متر بالثانية، حيث d تمثل عمق المياه. ما سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر؟



[1-1-1] استعمال ترتيب العمليات لتبسيط جمل عددية
Using ordering operations to simplify the numerical sentences

تعرفت سابقاً إلى الأعداد الطبيعية والكلية والصحيحة والنسبية والحقيقية، ويمكن إدراجها بالترتيب الآتي: $N \subset W \subset Z \subset Q \subset R$، وكذلك تعلمت كيفية تبسيط جمل عددية باستعمال ترتيب العمليات على هذه الأعداد، وسوف تزيد مهارتك في تبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد حقيقية مختلفة فيها جذور حقيقية وجذور مربعات كاملة وكذلك كسور تحتوي على جذور بتطبيق الخواص عليها مع استعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية وكذلك استعمال تنسيب المقام لتبسيط العبارات وذلك من خلال ضرب مقام الكسر بالعامل المنسب (المرافق) (العدد) $2-\sqrt{3}$ هو العامل المنسب (المرافق) للعدد $2+\sqrt{3}$ لأن حاصل ضربهما عدد نسبي).

مثال (1) جد سرعة التسونامي التقريبية إذا كان عمق المياه 1000 متر.

قانون حساب سرعة التسونامي حيث d تمثل عمق المياه

$$v=\sqrt{9.6d}$$

سرعة التسونامي التقريبية

$$=\sqrt{9.6\times 1000}=\sqrt{9600}\approx 98 \text{ m/sec}$$

مثال (2) بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

باستعمال التوزيع

$$i)\ (\sqrt{12}-\sqrt{18})(\sqrt{12}+\sqrt{18})=(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$$

$$=2\sqrt{3}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})-3\sqrt{2}(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})=12+6\sqrt{6}-6\sqrt{6}-18=-6$$

$$ii)\ \left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{\sqrt{27}}\right)=\left(\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\div\left(\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\times\frac{-3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}=-1$$

مثال (3) بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

$$i)\ \sqrt{12}(\sqrt{3}-\sqrt{8})-6=2\sqrt{3}(\sqrt{3}-2\sqrt{2})-6=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}-2\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}-6$$

$$=6-4\sqrt{3\times 2}-6=-4\sqrt{6}\approx -4\times 2.4=-9.6$$

$$ii)\ (-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{1}{9}\sqrt{28}\right)=\sqrt[3]{-27}\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{2}{9}\sqrt{7}\right)=-3\left(\frac{1}{9}\sqrt{7}-\frac{2}{9}\sqrt{7}\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\sqrt{7}+\frac{2}{3}\sqrt{7}=\frac{1}{3}\sqrt{7}\approx 0.9$$

ملاحظة: $\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$

مثال (4)

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد الحقيقية:

$$i)\ \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times 1 = \frac{7-\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}(7-\sqrt{5})}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5} - \sqrt{5}\sqrt{5}}{5} = \frac{7\sqrt{5} - 5}{5}$$

الضرب بالمرافق

$$ii)\ \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{2\sqrt{3}-\sqrt{7}} \times \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2\sqrt{3}+\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{7}(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}{(2\sqrt{3}-\sqrt{7})(2\sqrt{3}+\sqrt{7})}$$

المقام فرق بين مربعين

$$= \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{12-7} = \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{3}}{5}$$

[1-1-2] استعمال الحاسبة والتقريب لتبسيط جمل عددية
Using calculator and approximation to simplify the numerical sentences

تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمل عددية تحتوي على قوى (أسس) سالبة صحيحة للعدد وصورة علمية للعدد باستعمال الحاسبة، والآن سوف تزيد مهارتك بتبسيط الجمل العددية التي تحتوي على أعداد مرفوعة إلى قوى (أسس) نسبية إضافةً إلى الأعداد الصحيحة مستعملاً الحاسبة لكتابة الناتج مقرَّباً.

مثال (5)

إحسب الأسس لكل مما يلي واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين إذا لم يكن عدداً صحيحاً:

$$i)\ 9^{-\frac{3}{2}} = (3^2)^{-\frac{3}{2}} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27} \approx 0.04$$

$$ii)\ (\sqrt{7})^2 = (7^{\frac{1}{2}})^2 = 7$$

$$iii)\ 2^{\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{-3}{2}} = 2^{\frac{10+2-9}{6}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \approx 1.41$$

$$iv)\ 5^2 \div 5^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}-\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2.24$$

إستعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

$$v)\ (\frac{1}{2})^2 + 3^{-2} - 2^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \sqrt{2^3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \sqrt{8} \approx 0.25 + 0.11 - 2.83 = -2.47$$

$$iv)\ 8^{\frac{1}{3}} - (-8)^0 + 3^2 \times 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + 3^{\frac{5}{2}} = \sqrt[3]{8} - 1 + \sqrt{3^5} \approx 2 - 1 + 9 \times 1.73 = 16.57$$

مثال (6)

إستعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

$$i)\ 7.6 \times 10^{-4} - 0.4135 \times 10^{-3} = 7.6 \times 10^{-4} - 4.135 \times 10^{-4} = 3.465 \times 10^{-4} \approx 3.47 \times 10^{-4}$$

$$ii)\ 0.052 \times 10^4 + 7.13 \times 10^2 = 5.2 \times 10^2 + 7.13 \times 10^2 = 12.33 \times 10^2 \approx 1.23 \times 10^3$$

$$iii)\ (7.83 \times 10^{-5})^2 = (7.83 \times 10^{-5})(7.83 \times 10^{-5}) = 61.3089 \times 10^{-10} \approx 6.13 \times 10^{-9}$$

$$iv)\ 4.86 \times 10^2 \div 0.55 \times 10^5 = (4.86 \div 0.55) \times 10^2 \times 10^{-5} \approx 8.84 \times 10^{-3}$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

بسّط الجمل العددية الآتية:

الأسئلة (1 - 4) مشابهة للمثال (2)

1. $(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3}) = ...$
2. $(\sqrt{7}-\sqrt{2})^2 = ...$
3. $(\sqrt{125}-\sqrt{20})\left(\sqrt[3]{\frac{8}{27}}\right) = ...$
4. $\frac{4\sqrt{12}}{5\sqrt[3]{-27}} \div \frac{2\sqrt{24}}{\sqrt{8}} = ...$

بسّطِ الجملَ العدديةَ التاليةَ واكتب الناتجَ لأقربِ عُشرٍ:

الأسئلة (5 - 6) مشابهة للمثال (3)

5. $\sqrt{7}(\sqrt{28}-\sqrt{2}) - 5 \approx ......$
6. $(-125)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{10}\sqrt{3}-\frac{1}{4}\sqrt{12}\right) \approx ......$

بسّطِ الجملَ العدديةَ التاليةَ باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

الأسئلة (7 - 9) مشابهة للمثال (4)

7. $\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{3}} = ...$
8. $\frac{1-\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = ...$
9. $\frac{\sqrt{50}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{10-\sqrt{6}}{2\sqrt{6}} = ...$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة لكل مما يأتي:

الأسئلة (10 - 11) مشابهة للمثال (5)

10. $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3^{-3} - 3^{\frac{3}{2}} \approx ......$
11. $27^{\frac{1}{3}} - (-9)^0 + 3^2 \times 5^{\frac{1}{2}} \approx ......$

استعمل الحاسبة لتكتب الناتج بالصورة العلمية للعدد مقرباً لأقرب مرتبتين عشريتين:

الأسئلة (12 - 13) مشابهة للمثال (6)

12. $6.43 \times 10^{-5} - 0.25 \times 10^{-3} \approx .....$
13. $(9.23 \times 10^{-3})^2 \approx ......$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

بسّط الجمل العددية الآتية:

14. $(\sqrt{18}-\sqrt{50})\left(\frac{-27}{64}\right)^{\frac{1}{3}} = ...$
15. $\frac{\sqrt{12}}{3\sqrt[3]{125}} \div \frac{5\sqrt[3]{8}}{\sqrt{25}} = ...$

بسّط الجملة العددية التالية واكتب الناتج لأقرب عُشر:

16. $7\sqrt{\frac{2}{49}} - 3\sqrt{\frac{8}{81}} + \sqrt{\frac{18}{36}} \approx ......$

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات على الأعداد:

17. $\frac{\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{\sqrt{7}+3\sqrt{5}} = ...$
18. $\frac{\sqrt{33}-\sqrt{11}}{\sqrt{99}} - \frac{\sqrt{60}-\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} = ...$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

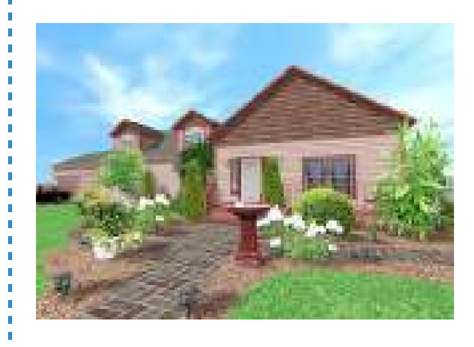


19 **الأقمارُ الاصطناعيةُ:** يستعمل القمرالصناعي بصفة أساسية في الاتصالات مثل إشارات التلفاز والمكالمات الهاتفية في جميع أنحاء العالم والتنبؤ بالطقس وتعقب الأعاصير، إذ تدور هذه الأقمار بسرعات محددة في مدارات خاصة بها حول الأرض، وتحسب سرعة القمر المدارية بالعلاقة التالية: $v=\sqrt{\frac{4\times10^{14}}{r}}$ m/sec ، إذ r نصف قطر المدار (بُعد القمرعن مركز الأرض). ما سرعة القمر إذا كان نصف قطر المدار 300km ؟



20 **مكافحةُ الحرائقِ:** تحسب سرعة تدفق الماء الذي يضخ من سيارات الحريق بالقانون $v=\sqrt{2hg}$ foot/sec ، إذ h تمثل أقصى ارتفاع للماء و g يمثل التعجيل الأرضي ($32\ foot/sec^2$). لإطفاء الحريق في الغابات تحتاج إدارة مكافحة الحرائق في الدفاع المدني إلى مضخة لتضخ الماء إلى ارتفاع 80 foot. فهل تفي بحاجتها مضخة تقذف الماء بسرعة 72 foot/sec ؟

1 foot = 30 cm
وحدة قياس بالنظام الفرنسي



21 **هندسةٌ:** جد مساحة المثلث الذي يعلو واجهة البيت إذا كان ارتفاعه $\sqrt{18}-\sqrt{3}$ m وطول قاعدته $3\sqrt{2}+\sqrt{3}$ m .

فَكِّرْ

22 **تحدٍّ:** أثبتْ صحة مايأتي:

$$(7^{\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{3}})\ (7^{\frac{2}{3}}+7^{\frac{1}{3}}\,5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}})=2$$

23 **أُصحِّحُ الخطأ:** كتبَ شاكر ناتجَ جمعِ العددين كالآتي:

$$8.4\times10^{-3}+0.52\times10^{-2}=1.36\times10^{-3}$$

حدّد خطأَ شاكر وصحِّحهُ .

24 **حسٌّ عدديٌّ:** هل أن العددَ $\sqrt{125}$ يقع بين العددين 10.28 و 11.28 ؟

أُكتبْ

ناتجَ الجمعِ بالتقريبِ لأقربِ عُشر:

$$6^{\frac{3}{2}}+5^{\frac{3}{2}}\approx .....$$

الدرسُ]1-2[التطبيقات Mappings

فكرةُ الدرس
- تعرف التطبيق وأنواعه وكيفية تمثيله بيانياً في المستوي الإحداثي وتعرف تركيب التطبيقات.

المفردات
- العلاقة
- الزوج المرتب
- الضرب الديكارتي
- التطبيق
- المجال والمجال المقابل والمدى
- تركيب التطبيقات

تعلم

مجموعة X تمثل بعض المناطق الأثرية في العراق $X = \{$باب عشتار، أور، الحضر$\}$
ولتكن المجموعة Y تمثل بعضَ المدن العراقية $Y = \{$بغداد، الحلة، الناصرية، الموصل، أربيل$\}$
العلاقة $R: X \longrightarrow Y$ التي تمثل اقتران كل منطقة أثرية إلى المدينة التي تقع فيها:
$R = \{$(الحضر ، الموصل)، (أور ، الناصرية)، (باب عشتار ، بابل)$\}$ تسمى تطبيق مجاله X ومجاله المقابل Y.



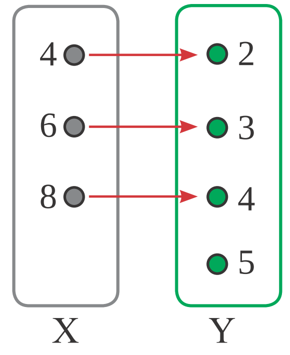
]1-2-1[التطبيق وتمثيله في المستوي الإحداثي
Mapping and its representation in the coordinate plane

تعرفت سابقاً إلى العلاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y وهي المجموعة الجزئية (مجموعة من الأزواج المرتبة (x,y) إذ ينتمي المسقط الأول «الأحداثي الأول» إلى المجموعة X والمسقط الثاني «الإحداثي الثاني» إلى المجموعة Y) من حاصل الضرب الديكارتي X×Y الذي يمثل مجموعة كل الأزواج المرتبة، وسوف تتعرف على التطبيق $R: X \longrightarrow Y$ وكيفية تمثيله بمخطط سهمي وتمثيله بالمستوي (بيانياً) والتعرف على أنواعه.

التطبيق: لتكن R علاقة من المجموعة X إلى المجموعة Y وكان لكل عنصر في X صورة واحدة في Y عندئذ تسمى العلاقة R تطبيق من X إلى Y , $R: X \longrightarrow Y$ وتسمى المجموعة X بمجال التطبيق (Domain)، والمجموعة Y بالمجال المقابل للتطبيق (Co-domain)، ويسمى كل عنصر في Y مرتبط بعنصر من X صورة لذلك العنصر، وتسمى مجموعة كل الصور في المجال المقابل بالمدى (Range)، وتسمى القاعدة التي تنقل العنصر إلى صورته بقاعدة الاقتران (قاعدة التطبيق) ويرمز لها (x,y) ، R(x) .

مثال (1)

إذا كانت $R: X \longrightarrow Y$ تمثل تطبيقاً بقاعدة اقتران $(y = \frac{1}{2}x)$ من المجموعة $X=\{4,6,8\}$ إلى المجموعة $Y=\{2,3,4,5\}$. اكتب التطبيق على شكل مجموعة أزواج مرتبة ثم مثّل التطبيق بمخطط سهمي، وحدّد المجال والمدى للتطبيق .



يوضّح المخطط السهمي علاقة ارتباط عناصر المجموعتين ضمن قاعدة الاقتران $y = R(x) = \frac{1}{2}x$ أي:

$$4 \longrightarrow 2 \quad , \quad 6 \longrightarrow 3 \quad , \quad 8 \longrightarrow 4$$

ولذا مجموعة التطبيق $R = \{(4,2) , (6,3) , (8,4)\}$

المجال: وهومجموعة الإحداثيات الأولى من الأزواج المرتبة في R وهو المجموعة $\{4,6,8\}$

المدى: وهومجموعة الإحداثيات الثانية من الأزواج المرتبة في R ، وهو المجموعة $\{2,3,4\}$

ملاحظة: المدى هو مجموعة جزئية من المجال المقابل للتطبيق

نلاحظ هنا المدى ≠ المجال المقابل

مثال (2) الجدول التالي يمثل العلاقة بين الوزن (كغم) وسعر السمك $(f(x) = y)$.

هل تمثّل العلاقة تطبيقاً ؟

إذا كانت تطبيقاً فاكتب قاعدة الاقتران وحدِّد المجال والمدى ومثِّله بالمستوي.

Y السعر بألوف الدنانير	X الوزن/كغم
2	1
4	2
6	3
8	4

قاعدة الاقتران $y = 2x$

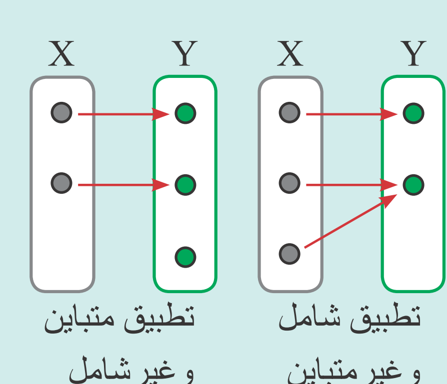
المجال $\{1,2,3,4\}$ ، المدى $\{2,4,6,8\}$

[1-2-2] أنواع التطبيقات
The kind of mappings

يكون التطبيق $f: X \longrightarrow Y$:

i) التطبيق شامل Surjective mapping

إذا كان المدى = المجال المقابل.



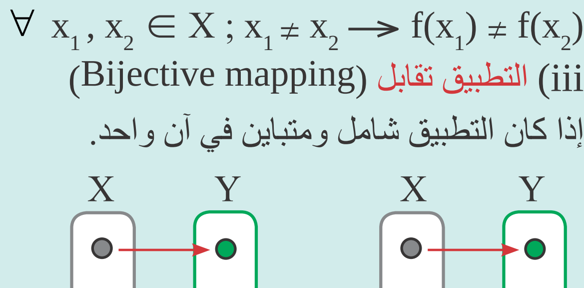
تطبيق متباين وغيرشامل — تطبيق شامل وغيرمتباين

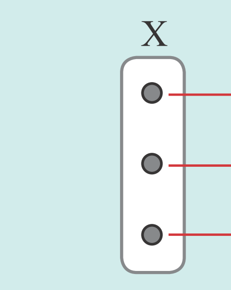
ii) التطبيق المتباين Injective mapping

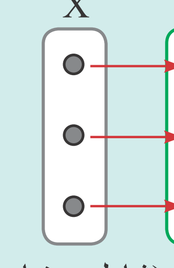
$\forall\ x_1, x_2 \in X ; x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

iii) التطبيق تقابل (Bijective mapping)

إذا كان التطبيق شامل ومتباين في آن واحد.







علاقة وليست تطبيق — تطبيق تقابل (شامل ومتباين)

مثال (3) إذا كانت $f: Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = 2x^2 - 3$ ، بيّن نوع التطبيق حيث Z مجموعة الأعداد الصحيحة.

$f(x) = 2x^2 - 3\ ,\ f(-2) = 5\ ,\ f(-1) = -1\ ,\ f(0) = -3\ ,\ f(1) = -1\ ,\ f(2) = 5$

أولاً: التطبيق ليس شاملاً لأن المدى لايساوي المجال المقابل.

ثانياً: ليس متبايناً لأن $f(-1) = f(1) = -1$ بينما $-1 \neq 1$.

. . . , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , . . .

. . . , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , 4 , 5, . . .

[1-2-3] تركيب التطبيقات
The composition of mappings

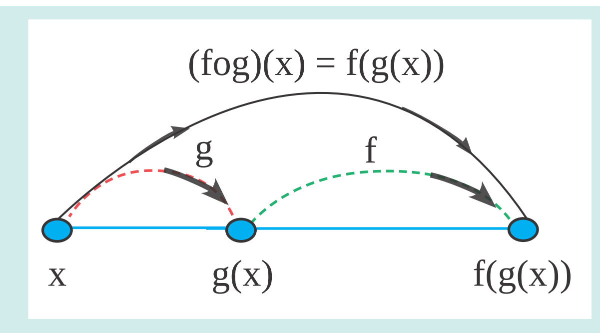
ندرس طريقة لإيجاد تطبيق جديد من تطبيقين معلومين إذ هما $f(x)$ ، $g(x)$ وهي:

i) التطبيق $(fog)(x) = f(g(x))$ ويُقرأ f تركيب g (f بعد g)

وهو ناتج إيجاد $g(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق f .

ii) التطبيق $(gof)(x) = g(f(x))$ ويُقرأ g تركيب f

وهو ناتج إيجاد $f(x)$ أولاً ثم إيجاد صورته في التطبيق g .



مثال (4)

إذا كان $f(x) = 2x + 1$ ، $f:N \longrightarrow N$ ، $g(x) = x^2$ ، $g:N \longrightarrow N$.

جد: i) $(fog)(3)$ ، ii) $(gof)(3)$، ماذا تلاحظ؟ ، iii) جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 33$.

i) $(fog)(3)$ نجد

$(fog)(3) = f(g(3)) = f(3^2)$

$= f(9) = 2 \times 9 + 1$

$= 19$

ii) $(gof)(3)$ نجد

$(gof)(3) = g(f(3))$

$= g(2 \times 3 + 1)$

$= g(7) = 7^2 = 49$

لاحظ أن $(fog)(3) \neq (gof)(3)$

iii) $(fog)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 2x^2 + 1$

$2x^2 + 1 = 33 \Rightarrow 2x^2 = 32 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$ or $x = -4$ يهمل

تأكَّدْ من فهمِكَ

اكتب قاعدة اقتران للتطبيق ومثّله بمخطط سهمي واكتب المجال والمدى له:

الأسئلة (1 - 2) مشابهة للمثال (1)

1. $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5)\}$
2. $g = \{(1,3), (2,5), (3,7), (4,9)\}$

اكتب قاعدة الاقتران للتطبيقات التالية ومثّلها في المستوي الإحداثي واكتب المجال والمدى لها:

الأسئلة (3 - 4) مشابهة للمثال (2)

3. $f = \{(1,0), (2,0), (3,0), (4,0)\}$
4. $g = \{(0,0), (1,-1), (2,-2), (3,-3)\}$

السؤال (5) مشابه للمثال (3)

5. إذا كان التطبيق $f: N \longrightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = 3x + 2$. بيِّن هل أن التطبيق شامل أم لا؟

الأسئلة (6 - 7) مشابهة للمثال (4)

6. ليكن التطبيقان $f : Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = 3x + 1$ وانّ $g : Z \longrightarrow Z$ حيث $g(x) = 2x + 5$. جد قيمة x إذا كان $(fog)(x) = 28$.
7. إذا كانت $f: N \longrightarrow N$ حيث $f(x) = 5x+2$ وانّ $g:N \longrightarrow N$ إذ $g(x) = x + 3$. اكتب التطبيق fog بكتابة الأزواج المرتبة له.

تدربْ وحلّ التمريناتِ

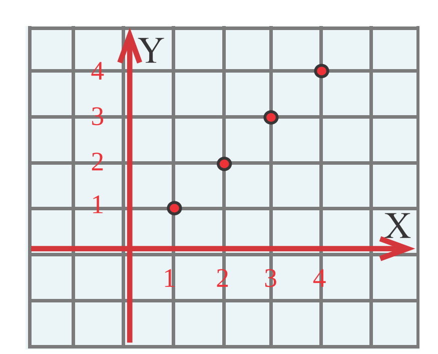
8. إذا كان $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{4,5,6\}$ وانّ $f: A \longrightarrow B$ معرّف كالآتي: $f = \{(1,4), (2,5), (3,6)\}$ ، ارسم المخطط السهمي للتطبيق ومثِّله بالمستوي الإحداثي.
9. إذا كان $f: A \longrightarrow Z$ حيث $f(x) = x^2$ والمجموعة $A=\{-2,-1,0,1,2\}$ ، مثِّل التطبيق في المستوي الإحداثي وبيّن هل أنه تطبيق متباين أم لا ؟
10. ليكن $f: N \longrightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = x^2$, $g: N \longrightarrow N$ إذ $g(x) = x + 1$. والمطلوب إيجاد:

i) $(gof)(x)$, $(fog)(x)$ ، ii) $(fog)(2)$, $(gof)(2)$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



11 **درجات الحرارة:** سجلت درجات الحرارة في أحد أيام الشتاء بالعلاقة التالية $R = \{(6,-2), (9,-3), (12,-4), (15,-5)\}$ إذ يمثل الإحداثي الأول الوقت بالساعة والإحداثي الثاني درجة الحرارة بالدرجات السيليزية. مثّل العلاقة بجدول ومثّلها بالمستوي الإحداثي، هل تمثّل العلاقة تطبيقاً أم لا؟ معللاً إجابتك.



12 **المستوي الإحداثي:** الشكل البياني المجاور يمثل التطبيق $f:N \longrightarrow N$. اكتب إحداثيات الأزواج المرتبة التي تمثّلها نقاط التطبيق في البياني، اكتب قاعدة اقتران التطبيق، هل التطبيق متباين أم لا؟



13 **صحة:** العلاقة $W_r = 2(\frac{W_b}{3})$ تمثل وزنَ الماء في جسم الإنسان، و W_b تمثل وزنَ الإنسان. وزن حسان 150kg، استعملَ نظام خاص بإنقاص الوزن لمدة ثلاثة أشهر ففقَدَ من وزنه 6kg في الشهر الأول ثم 12kg في الشهر الثاني، 12kg في الشهر الثالث. اكتب جمع الأزواج المرتبة للعلاقة بين وزن حسان ووزن الماء في جسمه، هل تمثّل تطبيقاً أم لا ؟

فَكِّرْ

14 **تحدٍّ:** إذا كان $A=\{1 ,2 ,3\}$ وكان $f: A \longrightarrow A$ و $g: A \longrightarrow A$ معرّفان كما يلي:

$f = \{(1,3) , (3,3) , (2,3)\}$, $g = \{(3,1) , (1,2) , (2,3)\}$

بيِّن هل أن $fog = gof$ ؟

15 **أُصحِّحُ الخطأ:** قال ياسين إن العلاقة $f: Z \longrightarrow Z$ حيث $f(x)= x^3$ لا تمثّل تطبيقاً متبايناً.

حدّد خطأ ياسين وصحّحهُ.

16 **حسٌّ عدديٌّ:** حدِّد ما إذا كانت كل علاقة $f: X \longrightarrow Y$ فيما يلي تمثل تطبيقاً أم لا؟ فسِّر ذلك.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

أُكتبْ

قيمة x إذا كان $f: N \longrightarrow N$ يمثل تطبيقاً حيث $f(x) = 4x - 3$ ، وأنّ $(fof)(x) = 33$.

الدرسُ]1-3[المتتابعات

The Sequences

فكرةُ الدرس
- التعرف إلى المتتابعة
- والمتتابعة الحسابية وخواصها

المفردات
- المتتابعة
- المتتابعة الحسابية
- الحد العام
- المتتابعة الثابتة
- أساس المتتابعة

تعلم

يعمل بشار في المرسم خمسة أيام في الأسبوع وينتج لوحةً فنيةً كلَّ ثلاثة أيام. نظِّمْ جدولاً يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات التي رسمها بشار إذا عمل 4 أسابيع في المرسم. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتالية؟



]1-3-1[المتتابعة والدالة
The sequence and function

تعرفت سابقاً إلى الدالة وكيفية تحديد مجالها ومداها والآن سوف تتعرف إلى المتتابعة كدالة وكيفية التعبير عنها وكتابة حدودها وكما يأتي: إن المتتابعة $f:N \longrightarrow R$ (Sequence) هي دالة تمثلها مجموعة الأزواج المرتبة $\{(1,f(1)) , (2,f(2)) , (3,f(3)) , \dots ,(n,f(n)), \dots\}$ إذ إنّ المساقط الأولى هي مجموعة الأعداد الطبيعية (متتابعة غير منتهية infinite sequence ويرمز لها $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$ أو $(\{u_n\}_{n=1}^{\infty})$ أو مجموعة جزئية منها (متتابعة منتهية finite sequence ويرمز لها $\{f(n)\}_{n=1}^{m}$ أو $(\{u_n\}_{n=1}^{m})$، ولذا اكتُفيَ بكتابة المساقط الثانية (الصور) $\{((f(1)) , (f(2)) , (f(3)) ,\dots, (f(n) ,\dots\}$ ويسمى u_n بالحد العام للمتتالية وأن $u_n = f(n)$.

والمتتالية تكتب $\{u_1 ,u_2 ,u_3 ,u_4 ,\dots ,u_i ,\dots\}$، أو $u_1 ,u_2 ,u_3 ,u_4 ,\dots ,u_i ,\dots$.

مثال (1) نظّم جدولاً يربط بين عدد الأيام وعدد اللوحات. اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟

عدد اللوحات	1	2	3	4	5	6
عدد الأيام	3	6	9	12	15	18

الأزواج المرتبة $\{(1,3),(2,6),(3,9),(4,12),(5,15),(6,18)\}$

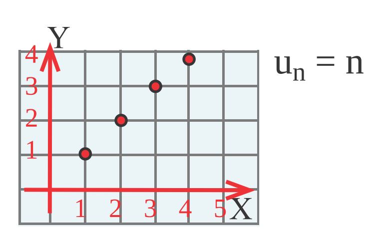
نعم يمثل نمطاً والعلاقة تمثل "ثلاثة أمثال" والعلاقة تمثل متتابعة حدّها العام هو

$u_n = 3n \,, n \in \{1,2,3,4,5,6\}$، وتكتب بالشكل الآتي: $\{u_n\} = \{3n\} = \{3,6,9,12,15,18\}$

مثال (2) **اكتب الأزواج المرتبة الخمسة الأولى للمتتابعة $\{u_n\}$ ومثّلها في المستوي الإحداثي:**

i) $\{n\}= \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

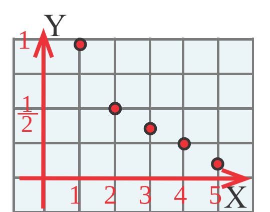
$\{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5) \}$



$u_n = n$

ii) $\{\frac{1}{n}\}= \{ 1, \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \dots\}$

$\{(1,1), (2, \frac{1}{2}), (3, \frac{1}{3}), (4, \frac{1}{4}), (5, \frac{1}{5})\}$



$u_n = \frac{1}{n}$

[1-3-2] المتتابعة الحسابية
Arithmetic sequence

i) المتتابعة الحسابية: هي المتتابعة التي يكون فيها ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرةً عدداً ثابتاً ويسمى أساس المتتابعة (الفرق المشترك Common Difference)، ويرمز له $d= u_{n+1} - u_n$. ويمكن كتابة المتتابعة بمعرفة حدها الأول $u_1 = a$ وأساسها d. وقانون الحد العام للمتتابعة الحسابية هو $u_n= a + (n-1)\, d$ حيث $n \in N$.

ويمكن تحديد نوع المتتابعة بصورة عامة كما يلي:

i) المتتابعة المتزايدة وفيها $d > 0$ مثال $\{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$.

ii) المتتابعة المتناقصة: وفيها $d < 0$ مثال $\{4, 2, 0, -2, -4, \dots\}$.

iii) المتتابعة الثابتة وفيها $d = 0$. مثال $\{5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$.

مثال (3) **اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية الآتية:**

i) متتابعة حسابية الحد الأول فيها 3 و أساسها 6 .

$\{3, 9, 15, 21, 27\}$

ii) متتابعة حسابية الحد الأول فيها 1 وأساسها 3- .

$\{1, -2, -5, -8 , -11\}$

iii) متتابعة حسابية حدها السابع 36 وأساسها 4 .

$u_7 = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_7 = a + 6d \Rightarrow 36 = a + 6 \times 4 \Rightarrow a = 12$

$\{ 12, 16, 20, 24, 28\}$

$u_1 \overset{+d}{\Rightarrow} u_2 \overset{+d}{\Rightarrow} u_3 \Rightarrow \dots\dots \overset{+d}{\Rightarrow} u_n$

مثال (4) **اكتب حدود للمتتابعات الآتية:**

i) متتابعة حسابية حدها الثالث 8 و $d = -3$. جد الحدود بين u_7 و u_{11} .

$u_n = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_3 = a + 2d \Rightarrow 8 = a - 6 \Rightarrow a = 8 + 6 = 14$

$u_n = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_7 = a + 6d \Rightarrow u_7 = 14 + 6(-3) \Rightarrow u_7 = -4$

نجد قيمة a ومنها نحصل على قيمة الحد 7 والحدود التي تليه

$u_8 = 4_7 + d = - 4 - 3 = -7 \ , \ u_9 = u_8 + d = - 7 - 3 = -10$

$u_{10} = 4_9 + d = - 10 - 3 = -13 \ , \ \{-7 , -10, -13\}$ حدود المتتالية

ii) اكتب الحد العشرين من المتتابعة الحسابية $\{6, 1, -4, -9, \dots\}$ وحدِّد ما إذا كانت المتتابعة متناقصة أم متزايدة.

$d = u_{n+1} - u_n \Rightarrow d =1- 6 = -5 , a = 6$

$u_n = a + (n-1)\, d \Rightarrow u_{20} = a + 19d \Rightarrow u_{20} = 6 + 19 (-5) \Rightarrow u_{20} = -89$

بما أن d أصغر من صفر، لذا انّ المتتالية متناقصة.

مثال (5) **اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:**

i) $\{2n -1\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, ii) $\{(-1)^n\}= \{-1, 1, -1, 1, -1\}$

iii) $\{7\} = \{7, 7, 7, 7, 7\}$, iv) $\{\frac{n}{3}\} = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\}$

v) $\{n^2\} = \{1, 4, 9, 16, 25\}$, vi) $\{n^3\}= \{1, 8, 27, 64, 125\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى:

الأسئلة (1 - 5) مشابهة للمثال (2)

1 $u_n = 3n$

2 $u_n = n - 4$

3 $u_n = 3n^2$

4 $u_n = \frac{1}{2n}$

5 $u_n = 3n - 1$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية:

الأسئلة (6 - 8) مشابهة للمثال (3)

6 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 1 وأساسها 5.

7 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 5- وأساسها 2.

8 متتابعة حسابية الحد الأول فيها 3- وأساسها 4 - .

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

الأسئلة (9 - 11) مشابهة للمثال (4)

9 جد الحدود بين u_8 و u_{12} لمتتابعة حسابية حدها الثالث 9 و $d = -2$.

10 جد الحدود بين u_6 و u_{10} لمتتابعة حسابية حدها الثاني 11- و $d = -3$.

11 اكتب الحد الثالث والعشرين من المتتابعة الحسابية $\{3, -1, -5, -9, \ldots\}$.

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

الأسئلة (12 - 15) مشابهة للمثال (5)

12 $\{4n\} = \ldots\ldots\ldots$

13 $\{2n - 5\} = \ldots\ldots\ldots$

14 $\{\frac{1}{n+1}\} = \ldots\ldots\ldots$

15 $\{9\} = \ldots\ldots\ldots$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

اكتب الأزواج المرتبة الأربعة الأولى للمتتابعة التي حدها العام معطى:

16 $u_n = 10 - 4n$

17 $u_n = \frac{1}{3n+1}$

18 اكتب الحدود الخمسة الأولى للمتتابعة الآتية:

متتابعة حسابية الحد السابع فيها $\frac{1}{24}$ وأساسها $\frac{1}{3}$.

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

19 جد الحدود بين u_{10} و u_{13} لمتتابعة حسابية حدها السابع $\frac{13}{2}$ و $d = 1$.

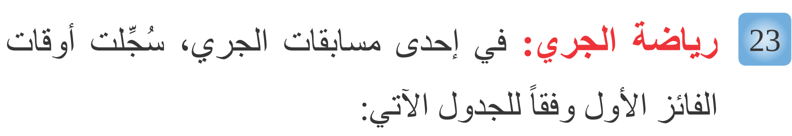
20 جد الحدود بين u_{20} و u_{23} لمتتابعة حسابية حدها الثاني 0 و $d = -1$.

حدِّد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي:

21 $\{u_n\} = \{3 - 2n\}$

22 $\{u_n\} = \{n^3 - 1\}$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



23 رياضة الجري: في إحدى مسابقات الجري، سُجِّلت أوقات الفائز الأول وفقاً للجدول الآتي:

المسافة بالكيلومتر	1	2	3	4	5
الوقت بالدقيقة والثانية	3.12	6.32	9.52	12.72	15.92

اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علل إجابتك.



24 رياضة القفز بالزانة: يبيِّن الجدول التالي محاولات أحد أبطال العالم في رياضة سباق القفز بالزانة.



المحاولة	1	2	3	4	5
الارتفاع بالمتر	5.90	5.95	6.00	6.05	6.10

اكتب مجموعة الأزواج المرتبة من الجدول. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علل إجابتك.



25 زراعة: اشترى حسّان مزرعة لتربية الأبقار وبعد سنة أصبح فيها 20 بقرةً، وبدأت تزداد كلَّ سنة نتيجة الولادات بمعدل ثابت حتى أصبح عددها الضعف بعد مضي ست سنوات. مثِّل المسألة بجدول واكتب الأزواج المرتبة فيه. هل يمثل الجدول نمطاً؟ هل يمثل متتابعة؟ علِّل إجابتك.

فَكِّرْ

26 تحدٍّ: جد قيمة x التي تجعل الحدود الثلاثة الأولى للمتتابعة الحسابية كما يأتي:

$$\{2x, x + 1, 3x + 11, ...\}$$

27 أُصحِّحُ الخطأ: قالت رابحة أنّ المتتابعة التي حدها العام $u_n = 8 - 2n$ متتابعة متزايدة لأن $d > 0$. اكتشف خطأ رابحة وصحِّحه.

28 حسٌّ عدديٌّ: ماهو الحد الحادي عشر لمتتابعة حدها الثالث 4 وأساسها $-\frac{1}{2}$ ؟

أُكتبْ

الحد الذي ترتيبه 101 في المتتابعة الحسابية التي حدها الخامس 4 - وأساسها 2 .

الدرسُ [1-4] المتباينات المركبة
Compound Inequalities

فكرةُ الدرس
- حل المتباينات التي تحتوي أدوات الربط (و) ، (أو) وتمثيل الحل على مستقيم الأعداد.

المفردات
- المتباينة المركبة
- التقاطع
- الاتحاد
- مجموعة الحل

تعلم

تقاس درجات حرارة الجو خلال اليوم الواحد بدرجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى لكونها متغيرة من وقت لآخر. فإذا كانت درجة الحرارة السيليزية الصغرى في مدينة بغداد في شهر كانون الأول 8°C ودرجة الحرارة السيليزية الكبرى 15°C. اكتب متباينة تمثل درجة الحرارة في بغداد وجد حلّها.



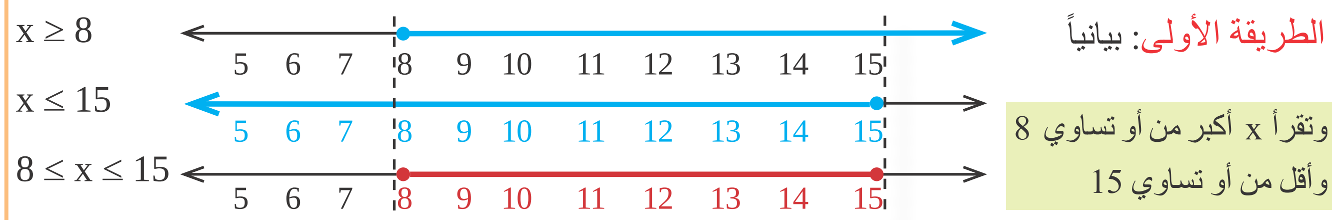
[1-4-1] المتباينات المركّبة التي تتضمن (و)
Compound inequalities contain “and”

تعرفت سابقاً إلى المتباينات الجبرية وخواصها وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد، والآن سوف تتعرف إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) وكيفية إيجاد مجموعة الحل لها وتمثيله على مستقيم الأعداد الحقيقية. المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) مؤلفة من متباينتين فإنها تكون صحيحة فقط إذا كانت المتباينتان صحيحتين، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة تقاطع حل المتباينتين، ويمكن إيجاده بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة التقاطع، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة التقاطع لهما ($S = S_1 \cap S_2$).

مثال (1) اكتب المتباينة المركبة التي تمثل درجة الحرارة السيليزية الصغرى والكبرى في بغداد وجد حلها.

درجة الحرارة (الصغرى) لاتقل عن 8^o ($x \ge 8$)، درجة الحرارة (الكبرى) لاتزيد على 15^o ($x \le 15$)،
لاتقل درجة الحرارة عن 8^o ولاتزيد على 15^o ($x \le 15$ و $x \ge 8$)، ويمكن حلها بإحدى الطريقتين:

الطريقة الأولى: بيانياً



وتقرأ x أكبر من أو تساوي 8 وأقل من أو تساوي 15

الطريقة الثانية: جبرياً

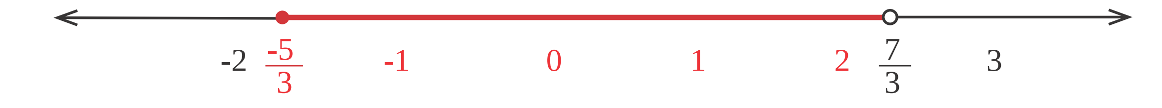
$8 \le x \le 15 \Leftrightarrow x \ge 8$ و $x \le 15$

$$\Rightarrow S = S_1 \cap S_2 = \{x: x \ge 8\} \cap \{x: x \le 15\} = \{x: 8 \le x \le 15\}$$

مثال (2) حل المتباينة المركبة التي تتضمن (و) $-3 \le 3x+2 < 9$ جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:

$$-3 \le 3x+2 < 9 \Rightarrow -3-2 \le 3x+2-2 < 9-2 \Rightarrow -5 \le 3x < 7 \Rightarrow \frac{-5}{3} \le \frac{3x}{3} < \frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3} \Rightarrow S = \{x: \frac{-5}{3} \le x < \frac{7}{3}\}$$



[1-4-2] المتباينات المركبة التي تتضمن (أو)

Compound inequalities contain “or”

بعد أن تعرفت إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (و) سوف تتعرف إلى المتباينة المركبة التي تحتوي على أداة الربط (أو) وتكون صحيحة فقط إذا كانت إحدى المتباينتين المكونتين لها في الأقل صحيحة، وعليه فإن مجموعة الحل لها عبارة عن مجموعة اتحاد حل المتباينتين، ويمكن إيجاده بطريقتين الأولى بيانياً بتمثيل حل المتباينتين على مستقيم الأعداد ثم تحديد منطقة الاتحاد، والثانية جبرياً وذلك بإيجاد مجموعة الحل لكل متباينة ثم أخذ مجموعة الاتحاد لهما ($S = S_1 \cup S_2$).

مثال (3) حل المتباينة المركبة $x+3 > 2$ أو $x+3 \le -2$ بيانياً وجبرياً.

الطريقة الأولى: بيانياً

$x+3 > 2$ $x > -1$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

$x+3 \le -2$ $x \le -5$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

$x \le -5$ أو $x > -1$

-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

الطريقة الثانية: جبرياً

$x+3 > 2$ أو $x+3 \le -2 \Rightarrow \begin{cases} x+3 > 2 \text{ أو } x+3 \le -2 \\ x > -1 \text{ أو } x \le -5 \end{cases} \Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x > -1\} \cup \{x: x \le -5\}$

مثال (4) **حل المتباينة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:**

i) $y-3 \le -1$ أو $y + 3 > 6 \Rightarrow y \le 2$ أو $y > 3$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y: y \le 2\} \cup \{y: y > 3\}$

-1 0 1 2 3 4 5

ii) $\frac{2v+1}{3} > \frac{5}{3}$ أو $\frac{2v+1}{3} < \frac{1}{3} \Rightarrow v > 2$ أو $v < 0$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{v: v > 2\} \cup \{v: v < 0\}$

-2 -1 0 1 2 3 4

[1-4-3] المتباينة المثلثية

Triangular inequality

من المواضيع التي تربط الجبر بالهندسة هي المتباينة المثلثية ”في كل مثلث مجموع طول ضلعين من أضلاعه يكون أكبر من طول الضلع الثالث“ وتستعمل في الإنشاءات الهندسية والتصاميم، إذا كانت أطوال أضلاع مثلث (A,B,C) فيجب أن تكون المتباينات الثلاث التالية صحيحة: $A+B > C$, $A+C > B$, $B+C > A$.

مثال (5) i) هل يمكن للقطع المستقيمة التي طولها 13cm ،10cm ،2cm أن تشكّل مثلثاً؟

لايمكن أن تشكل مثلثاً لأنه: خطأ $2 + 10 \ngtr 13$ ، صحيحة $10 + 13 > 2$ ، صحيحة $2 + 13 > 10$.

ii) اكتب متباينة مركبة تبين طول الضلع الثالث في مثلث طول ضلعين فيه 8cm ، 10cm.

نفرض طول الضلع الثالث x ومنه:

$8 + 10 > x \Rightarrow 18 > x \Rightarrow$ الضلع الثالث أصغر من 18

$8 + x > 10 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow$ الضلع الثالث أكبر من 2

$10 + x > 8 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow$ لاتعطي أية معلومات مفيدة

$\Rightarrow$ ولذا يجب أن يكون طول الضلع أصغر من 18 وأكبر من 2 وبالمتباينة المركبة تبيّن طول الضلع الثالث $2 < x < 18$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

الأسئلة (1 - 2) مشابهة للمثال (1)

1. $-4 \le y - 1 < 3$
2. $-4 \le z + 2 \le 8$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

الأسئلة (3 - 4) مشابهة للمثال (2)

3. $x + 6 \ge 12$ و $x + 6 < 15$
4. $-9 < 2x - 1 \le 3$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

الأسئلة (5 - 6) مشابهة للمثال (3)

5. $8y \ge 64$ أو $8y \le 32$
6. $\frac{2z}{3} < \frac{2}{3}$ أو $\frac{2z}{3} \ge \frac{8}{9}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:

الأسئلة (7 - 8) مشابهة للمثال (4)

7. $3n - 7 > -5$ أو $3n - 7 \le -9$
8. $x + 15 \ge 30$ أو $x + 15 < 22$

هل يمكن رسم مثلث أطوال أضلاعه كما يأتي:

الأسئلة (9 - 12) مشابهة للمثال (5)

9. $1cm, 2cm, \sqrt{3}\,cm$
10. $5cm, 4cm, 9cm$
11. $1cm, \sqrt{2}\,cm, \sqrt{2}\,cm$
12. $3cm, 4cm, 2\sqrt{3}\,cm$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) بيانياً:

13. $x > -12$ و $x \le -7$
14. $2 \le y + 4 < 6$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

15. $14 \le 3x + 7$ و $3x + 7 < 26$
16. $\frac{1}{25} \le \frac{z+3}{5} \le \frac{1}{15}$

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) بيانياً:

17. $z - 2 < -7$ أو $z - 2 > 4$
18. $x - 6 \le -1$ أو $x - 6 > 4$

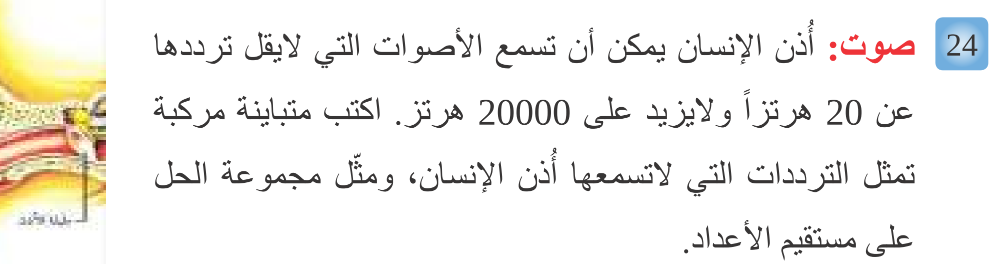
حل المتباينات المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً ومثّل الحل على مستقيم الأعداد:

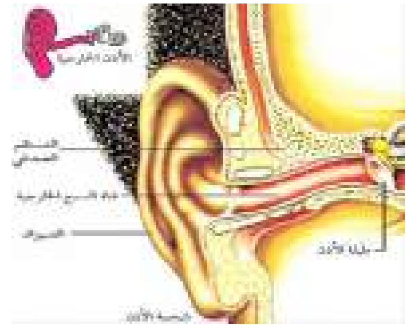
19. $\frac{y}{2} < 3\frac{1}{2}$ أو $\frac{y}{2} > 7\frac{1}{2}$
20. $5x \le -1$ أو $5x \ge 4$

اكتب المتباينة المركبة التي تبين طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا ضلعي المثلث معلومين:

21. $3cm, 10cm$
22. $6cm, 4cm$
23. $1cm, 3cm$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً





24 **صوت:** أُذن الإنسان يمكن أن تسمع الأصوات التي لايقل ترددها عن 20 هرتزاً ولايزيد على 20000 هرتز. اكتب متباينة مركبة تمثل الترددات التي لاتسمعها أُذن الإنسان، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.



25 **إطار السيارات:** ضغط الهواء المثالي الموصى به لإطارات السيارات الصالون لايقل عن 28 Pascal (kg/ ing^2) ولايزيد على 36 Pascal. اكتب متباينة مركبة تمثل الضغط، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

ملاحظة: باسكال (pascal) وحدة قياس ضغط الهواء مقدرة kg/ ing^2



26 **القطار المغناطيسي:** القطار المغناطيسي المعلق وهو قطار يعمل بقوة الرفع المغناطيسية وباختصار يعرف بالماجليف (Maglev). وصُمّمت أنواع مختلفة من هذه القطارات المغناطيسية في مختلف دول العالم إذ إنّ سرعتها لاتقل عن 300 k/h ولاتزيد على 550 k/h . اكتب متباينة تمثّل سرعة القطار، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

فَكِّرْ

27 **تحدٍّ:** اكتب متباينة مركبة تبين مدى طول الضلع الثالث في كلِّ مثلث:

7cm, 12cm, x cm

28 **أُصحّحُ الخطأ:** قالت سوسن إنّ المتباينة المركبة $x+3 \le 5$ و $-4 < x+3$ تمثل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد الآتية:

-9 -8 -7 -6 -5 -4 -2 -1 0 1 2 3 4 5

بيّن خطأ سوسن وصحّحه.

29 **حسٌّ عدديٌّ:** **اذكر ما إذا كانت الأطوال الثلاثة هي لمثلث أم لا؟ وضّح إجابتك .**

i) 3.2cm, 5.2cm, 6.2cm

ii) 1cm, 1cm, $\sqrt{2}$ cm

أُكتبْ

متباينة مركبة التي تمثل درجة الحرارة الصغرى 18^o ودرجة الحرارة العظمى 27^o.

الدرسُ [1-5] متباينات القيمة المطلقة

Absolute Value Inequalities

فكرةُ الدرس

- حل المتباينات التي تحتوي على قيمة مطلقة.

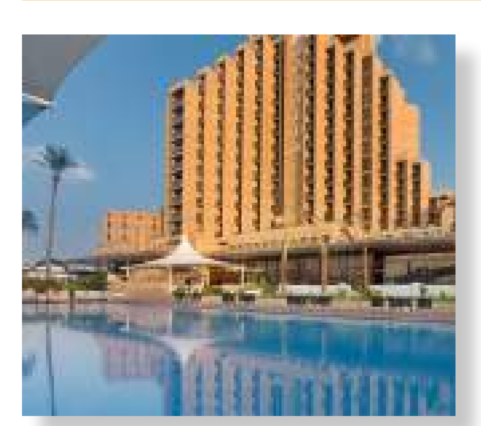
المفردات

- القيمة المطلقة

تعلم

فندق بابل من الفنادق السياحية في العاصمة بغداد ويقع في منطقة الكرادة. درجة حرارة الماء المثالية في حوض السباحة 25 درجة سيليزية تزداد أو تنقص بمقدار درجة واحدة.

اكتب متباينة قيمة مطلقة تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة.



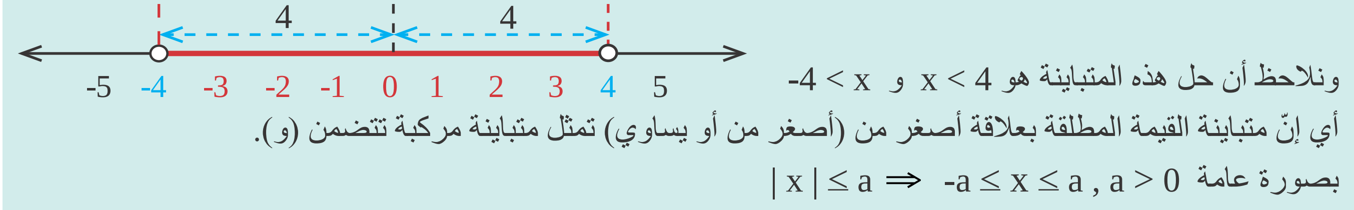
[1-5-1] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \le a$ حيث $x \in R$

Absolute value inequalities with form $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \le a$, $a \in R$

تعرفت سابقاً إلى المتباينات المركبة التي تحتوي على (و) و (أو) وكيفية حلها بيانياً وجبرياً وكيفية تمثيل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد. والآن سوف تتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \le a$ ، $a \in R$

مثل $|x| < 4$ وتعني: ما قيمة x التي تبعد عن الصفر بأقل من 4 وحدات؟

وهي كل الأعداد التي بين العددين 4- و 4 وتمثيلها على مستقيم الأعداد هو:



ونلاحظ أن حل هذه المتباينة هو $x < 4$ و $-4 < x$

أي إنّ متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أصغر من (أصغر من أو يساوي) تمثل متباينة مركبة تتضمن (و).

بصورة عامة $|x| \le a \Rightarrow -a \le x \le a , a > 0$

مثال (1) اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل درجة حرارة الماء في الحوض ومثّله بيانياً.

نفرض درجة حرارة الماء هي x درجة سيليزية، لذا المتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لاتزيد على 26^0 سيليزية:

$$x \le 25 + 1 \Rightarrow x - 25 \le 1$$

والمتباينة التي تمثل درجة حرارة الحوض عندما لاتنقص عن 24^0 درجة سيليزية:

$$x \ge 25 - 1 \Rightarrow x - 25 \ge -1$$

لذا متباينة القيمة المطلقة هي المتباينة المركبة التي تمثل مدى درجة حرارة الماء في حوض السباحة:

$$x - 25 \ge -1 \text{ و } x - 25 \le 1 \Rightarrow -1 \le x - 25 \le 1 \Rightarrow |x - 25| \le 1$$

وتمثيل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد هو

22 23 24 25 26 27 28

مثال (2) حل متباينات القيمة المطلقة، ومثِّل الحل على مستقيم الأعداد.

i) $|x + 6| < 3 \Rightarrow -3 < x + 6 < 3 \Rightarrow -3-6 < x < 3-6$
$\Rightarrow -9 < x < -3$

-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2

ii) $|y| - 5 \le 1 \Rightarrow |y| \le 1 + 5 \Rightarrow |y| \le 6$
$\Rightarrow -6 \le y \le 6$

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

[1-5-2] متباينات القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$ حيث $x \in R$

Absolute value inequalities with form $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$, $a \in R$

بعد أن تعرفت إلى متباينة القيمة المطلقة التي تحتوي على صورة $|g(x)| < a$ ، $|g(x)| \leq a$ حيث $x \in R$ والآن سوف تتعرف إلى متباينة القيمة المطلقة التي على صورة $|g(x)| > a$ ، $|g(x)| \geq a$ حيث $x \in$ مثل $|x| > 3$ وتعني:
المسافة بين x والصفر أكبر من 3 أي أنّ $x < -3$ أو $x > 3$ ومجموعة حل المتباينة هو $\{x: x < -3\} \cup \{x: x > 3\}$
لذا فإن متباينة القيمة المطلقة بعلاقة أكبر من (أكبر من أو يساوي) هي علاقة مركبة تتضمن (أو).
بصورة عامة $x \geq a$ أو $x \leq -a$, $a > 0$ $\Leftrightarrow$ $|x| \geq a$

مثال (3)

حل متباينة القيمة المطلقة ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

i) $|x + 4| > 2 \Rightarrow x + 4 < -2$ أو $x+4 > 2 \Rightarrow x < -6$ أو $x > -2$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{x: x < -6\} \cup \{x: x > -2\}$

ii) $|5y - 1| \geq 4 \Rightarrow 5y-1 \leq -4$ أو $5y-1 \geq 4 \Rightarrow y \leq -\frac{3}{5}$ أو $y \geq 1$

$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \{y: y \leq -\frac{3}{5}\} \cup \{y: y \geq 1\}$

iii) في تحليلات دم الإنسان البالغ يعد المدى الطبيعي للبوتاسيوم هو (3.5 - 5.3) mol/L.اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم في دم الإنسان.

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية واقل من القيمة الدنيا للمعدل هي: $x < 3.5$

المتباينة التي تمثل كمية البوتاسيوم غير الطبيعية وأكبر من القيمة العليا للمعدل هي: $x > 5.3$

المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم هو حل المتباينة المركبة: $x < 3.5$ أو $x > 5.3$

نجد متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المدى غير الطبيعي للبوتاسيوم:

نأخذ منتصف المسافة بين نقطتين ونطرح ونضيف نصف قطر المسافة

$x < 3.5$ أو $x > 5.3 \Leftrightarrow x < 4.4 - 0.9$ أو $x > 4.4 + 0.9$

$\Leftrightarrow x - 4.4 < -0.9$ أو $x - 4.4 > 0.9 \Leftrightarrow |x - 4.4| > 0.9$

مثال (4)

جد مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة الآتية:

i) $|2x - 5| + 3 < 11 \Rightarrow |2x - 5| < 8 \Rightarrow -8 < 2x - 5 < 8 \Rightarrow -3 < 2x < 13$

$\Rightarrow -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2} \Rightarrow \{x: x > -\frac{3}{2}\} \cap \{x: x < \frac{13}{2}\} \Rightarrow \{x: -\frac{3}{2} < x < \frac{13}{2}\}$

ii) $|7 - y| < 8 \Rightarrow -8 < 7 - y < 8 \Rightarrow -15 < -y < 1 \Rightarrow -1 < y < 15 \Rightarrow \{y: y > -1\} \cap \{y: y < 15\}$

iii) $|\frac{2t-8}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{2(t-4)}{4}| \geq 9 \Rightarrow |\frac{t-4}{2}| \geq 9 \Rightarrow |t - 4| \geq 18$

$\Rightarrow t - 4 \leq -18$ أو $t - 4 \geq 18 \Rightarrow t \leq -14$ أو $t \geq 22 \Rightarrow \{t : t \leq -14\} \cup \{t : t \geq 22\}$

iv) $|\frac{5 - 3v}{2}| \geq 6 \Rightarrow |5 - 3v| \geq 12 \Rightarrow 5 - 3v \leq -12$ أو $5 - 3v \geq 12 \Rightarrow -3v \leq -17$ أو $-3v \geq 7$

$\Rightarrow v \geq \frac{17}{3}$ أو $v \leq \frac{-7}{3} \Rightarrow \{v: v \geq \frac{17}{3}\} \cup \{v: v \leq \frac{-7}{3}\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل التالية:

1 تعد درجة الحرارة المثلى داخل الشقق 22^o سيليزية بزيادة أو نقصان لايتجاوز 2^o سيليزية.

السؤال 1
مشابه للأمثلة (1,3)

حل متباينات القيمة المطلقة ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.

الأسئلة (2 - 5) مشابهة للمثال (2)

2 $|x+1| < 5$

3 $|3z-7| \le 2$

4 $|x| + 8 < 9$

5 $|5y| - 2 \le 8$

الأسئلة (6 - 9) مشابهة للمثال (3)

6 $|x+4| > 6$

7 $|5z-9| > 1$

8 $|2x| + 7 \ge 8$

9 $|4y| - 2 > 3$

الأسئلة (10 - 13) مشابهة للمثال (4)

10 $|5-x| < 10$

11 $|4z-14| > 2$

12 $\left|\frac{x-12}{4}\right| \le 9$

13 $\left|\frac{6-2y}{4}\right| \ge 9$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل المسائل الآتية:

14 يجب أن تبقى درجة الحرارة داخل الثلاجة 8^o سيليزية بزيادة أو نقصان لايتجاوز 0.5^o سيليزية. اكتب مدى درجة الحرارة المثالية في داخل الثلاجة.

15 درجة غليان الماء 100^o سيليزية عند مستوى سطح البحر وتزداد وتنقص في المناطق الجبلية والوديان بما لايتجاوز 20^o سيليزية. اكتب مدى التذبذب في درجة غليان الماء.

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

16 $|x+3| < 6$

17 $|2z| - 5 < 2$

18 $2|x| - 7 \ge 1$

19 $|11z| - 2 \ge 9$

20 $\left|\frac{4}{5}z - 1\right| > \frac{4}{5}$

اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة لكل من التمثيلات البيانية الآتية:

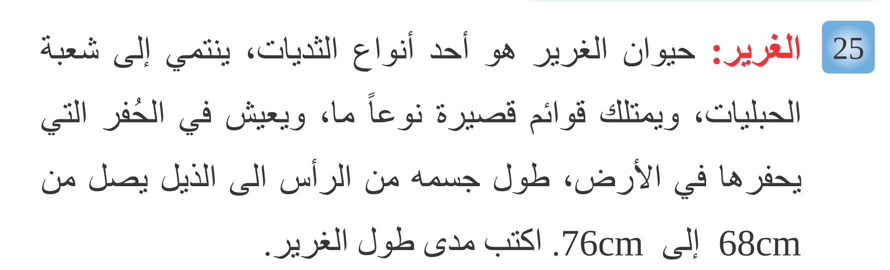
21 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

22 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3

23 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

24 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً **اكتب متباينة القيمة المطلقة التي تمثل كل مسألة مما يأتي:**



25 **الغرير:** حيوان الغرير هو أحد أنواع الثديات، ينتمي إلى شعبة الحبليات، ويمتلك قوائم قصيرة نوعاً ما، ويعيش في الحُفر التي يحفرها في الأرض، طول جسمه من الرأس الى الذيل يصل من 68cm إلى 76cm. اكتب مدى طول الغرير.



26 **صحة:** معدل النبض (عدد دقات القلب) الطبيعي للإنسان البالغ يتراوح من 60 الى 90 نبضةً في الدقيقة. اكتب مدى عدد الدقات غير الطبيعية لقلب الإنسان.



27 **مواصلات:** تطير الطائرات المدنية على ارتفاع يتراوح من 8km إلى 10km إذ تعد منطقةً جويةً معتدلةً. اكتب مدى منطقة الطيران المدنية.



فَكِّرْ

28 **تحدٍّ:** **حل متباينات القيمة المطلقة ومثّل الحل على مستقيم الأعداد.**

i) $\left| \frac{\sqrt{3}(x+1)}{\sqrt{2}} \right| \leq \sqrt{6}$

ii) $\left| \frac{\sqrt{12} - \sqrt{3}\, y}{\sqrt{5}} \right| \geq \sqrt{15}$

29 **أُصحِّحُ الخطأ:** قالت خلود إن متباينة القيمة المطلقة $|6 - 3y| \geq 7$ تمثل متباينة مركبة بعلاقة (و) ومجموعة الحل لها: $\{y: -\frac{1}{3} \leq y \leq \frac{13}{2}\}$. بيِّن خطأ خلود وصحّحه.

30 **حسٌّ عدديٌّ:** **اكتب مجموعة الحل لمتباينات القيمة المطلقة التالية في مجموعة الأعداد الحقيقية:**

i) $|z| - 1 < 0$

ii) $|x - 1| > 0$

أُكتبْ

متباينة قيمة مطلقة تمثّل موقفاً من واقع الحياة، ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد.

اختبار الفصل

Chapter Test

بسِّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1 $(\sqrt{3}+\sqrt{5})\ (\sqrt{3}+\sqrt{5}) = ...$

2 $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{6}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{8}-5}{3\sqrt{2}} = ...$

3 استعمل ترتيب العمليات والحاسبة لتكتب ما يلي مقرّباً لأقرب عُشر:

$(\frac{1}{125})^{\frac{1}{3}} - (-\frac{1}{2})^{0} + (121)^{\frac{1}{2}} \times (\frac{1}{9})^{\frac{1}{2}} = ...$

4 إذا كان $f: z \longrightarrow R$ حيث $f(x) = x^2$. ارسم مخططاً سهمياً للتطبيق وبيِّن هل أنّ التطبيق متباين، شامل، أو متقابل؟

5 إذا كان التطبيق $f: N \longrightarrow N$ إذ إنّ $f(x) = 3x + 1$, $g: N \longrightarrow N$ إذ $g(x) = x^2$.
جد: $(gof)(5)$, $(fog)(5)$, $(gof)(2)$, $(fog)(2)$.

6 إذا كان التطبيق $f: R \longrightarrow R$ حيث $f(x)= 3x+1$ والتطبيق $g: R \longrightarrow R$ إذ إنّ $g(x)= 2x+5$.
هل أنّ $(gof)(x) = (fog)(x)$ ؟ جد قيمة x إذا كانت $(fog)(x) = 28$.

اكتب حدود للمتتابعات الآتية:

7 جد الحدود بين u_3 و u_8 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{-3}{2}$ و $d = 2$.

8 جد الحدود بين u_4 و u_9 لمتتابعة حسابية حدها الثالث 6 و $d = -\frac{5}{2}$.

حدّد نوع المتتابعة (متزايدة ، متناقصة ، ثابتة) لكل مما يأتي:

9 $u_n = 9 - 3n$

10 $u_n = n^2 - 2$

11 $u_n = \frac{1}{3n+1}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل من المتتابعات الآتية:

12 $\{\frac{n}{n+2}\} = ...$

13 $\{4\sqrt{2}\} = ...$

14 $\{\frac{-n}{n+5}\} = ...$

حلّ المتباينات المركّبة ومثّل مجموعة الحل على مستقيم الأعداد:

15 $x + 6 \geq 12$ و $x+6 < 20$

16 $\frac{1}{16} < \frac{z+2}{2} \leq \frac{1}{8}$

17 $x-3 \leq -5$ أو $x-3 > 5$

18 $7t-5 > -1$ أو $7t-5 \leq -14$

19 $y \leq 0$ أو $y+7 \geq 16$

20 $\frac{y}{3} < 1\frac{1}{3}$ أو $\frac{y}{3} > 9\frac{1}{3}$

اكتب المتباينة المركّبة التي تبيّن مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا ضلعَي المثلث معلومين:

21 4cm , 9cm

22 5cm ,12cm

23 7cm ,15cm

حلّ متباينات القيمة المطلقة الآتية:

24 $|x - 6| \leq 3$

25 $|3z| - 5 < 4$

26 $|x + 1| > \frac{1}{2}$

27 $6|x| - 8 \geq 3$

28 $|3y| - 2 > 9$

29 $|8z| - 1 > 7$

30 $|4 - 3y| \geq 14$

31 $|\frac{6-3y}{9}| \geq 5$

الفصلُ 2

المقادير الجبرية
Algebraic Expressions



المدرسة المستنصرية مدرسة عريقة أُسّستْ في زمن العباسيين في بغداد عام 1233، وكانت مركزاً علمياً وثقافياً مهماً. تقع في جهة الرصافة من بغداد، وتتوسط المدرسة ساحة مستطيلة الشكل فيها نافورة كبيرة فيها ساعة المدرسة المستنصرية، لو فرضنا أن طول الساحة الداخلية للمدرسة هو $(x+14)$ متراً وعرضها $(x+2)$ متر، فيمكن حساب المساحة بضرب المقدارين الجبريين $(x+2)\ (x+14)$.

جد ناتج جمع المقادير الجبرية التالية أو طرحها:

1. $(3x^2 + 4x - 12) + (2x^2 - 6x + 10)$
2. $(\frac{1}{2}zy + 5z - 7y) - (\frac{1}{4}zy - 3z + 2y)$

جد ناتج الضرب للحدود الجبرية الآتية:

3. $7x^2 \times \frac{1}{14x}$
4. $\sqrt{2}\,yz \times \sqrt{2}\,yz^2$
5. $\frac{3}{4}v^2 t \times \sqrt{12}\,t^{-1}$
6. $3h(\frac{1}{6}v - \frac{1}{3}h^{-2})$

جد ناتج ضرب مقدارين جبريين:

7. $(x+2)(x-2)$
8. $(5-2z)(3+3z)$
9. $(\frac{1}{2}x^2 + 6)(\frac{4}{3}x^2 + 12)$
10. $(2\sqrt{3}\,t - 4)^2$
11. $(x+3)(x^2 - 3x + 9)$
12. $(xy+1)(x^{-1}y - xy^{-1} - 1)$

جد ناتج الضرب باستعمال الطريقة العمودية:

13. $(y-1)(y+1)$
14. $(2x+3)(4x^2 - x - 5)$
15. $(3-z)(3+5z-z^2)$

جد ناتج قسمة المقادير الجبرية الآتية:

16. $\frac{3xy^2}{15x^2y}$
17. $\frac{-47z^{-2}}{7z^2}$
18. $\frac{8x^3 + 4x^2 - 2x}{2x}$
19. $\frac{21 - 14a + 7a^2}{7a}$

حلل المقادير الجبرية باستعمال العامل المشترك الأكبر:

20. $3y^3 + 6y^2 - 9y$
21. $\frac{1}{2}zx^2 - 2z^2x + 4zx$

الدرسُ [2-1] ضرب المقادير الجبرية

Multiplying Algebraic Expressions

فكرة الدرس
- ضرب مقدار جبري في مقدار جبري يمثل حالات خاصة.

المفردات
- مربع مجموع
- مربع فرق
- مكعب مجموع
- مكعب فرق

تعلم

حوّطت حديقة منزلية مربّعة الشكل طول ضلعها h متر بممر عرضه 1 متر.

ما مساحة الممر بدلالة h ؟



[2-1-1] ضرب مقدارين جبريين كل منهما من حدين

Multiplying two algebraic expressions each of one contains two terms

تعلمت سابقاً كيفية ضرب حد جبري في حد جبري وكذلك ضرب مقدار جبري في مقدار جبري، الآن سوف تتعلم كيفية ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين ويمثلان مربع مجموع أو مربع فرق أو مجموع في فرق وذلك باستعمال الخواص التي درستها سابقاً من توزيع وابدال وترتيب.

مثال (1) جد مساحة الممر المحيط بالحديقة المربعة الشكل؟

مساحة الممر هي الفرق بين مساحتي المربع الكبير (الحديقة مع الممر) والمربع الصغير(الحديقة)

مساحة الحديقة مع الممر $(h+2)^2 = (h+2)(h+2) = h^2 + 2h + 2h + 4 = h^2 + 4h + 4$

مساحة الحديقة $h \times h = h^2$

مساحة الممر $(h^2 + 4h + 4) - h^2 = h^2 + 4h + 4 - h^2 = 4h + 4$

مثال (2) **جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:**

مربع مجموع حدين i) $(x + y)^2 = (x+y)(x+y) = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

مربع الفرق بين حدين ii) $(x - y)^2 = (x-y)(x-y) = x^2 - xy - yx + y^2 = x^2 - 2xy + y^2$

مجموع حدين × فرق بينهما iii) $(x + y)(x-y) = x^2 - xy + yx - y^2 = x^2 - y^2$

مجموع حدين × مجموع حدين iv) $(x + 3)(x + 5) = x^2 + 5x + 3x + 15 = x^2 + 8x + 15$

مجموع حدين × فرق بين حدين v) $(x + 2)(x - 6) = x^2 - 6x + 2x - 12 = x^2 - 4x - 12$

فرق بين حدين × فرق بين حدين vi) $(x - 1)(x - 4) = x^2 - 4x - x + 4 = x^2 - 5x + 4$

مثال (3) **جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:**

i) $(z + 3)^2 = z^2 + 6z + 9$

ii) $(h - 5)^2 = h^2 - 10h + 25$

iii) $(2x - 7)(2x + 7) = 4x^2 - 49$

iv) $(3y + 1)(y + 2) = 3y^2 + 7y + 2$

v) $(v + \sqrt{2})(v - \sqrt{2}) = v^2 - 2$

vi) $(n - \sqrt{3})(5n - \sqrt{3}) = 5n^2 - 6\sqrt{3}n + 3$

[2-1-2] ضرب مقدار جبري من حدين في آخر من ثلاثة حدود

Multiplying algebraic expression from two terms by another from three terms

تعلمت سابقاً ضرب المقادير الجبرية من عدة حدود والآن سوف تتعلم حالات خاصة من ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وذلك باستعمال الخواص التي درستها في التوزيع والإبدال والترتيب.

مثال (4) **جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:**

i) $(x+2)(x^2-2x+4) = x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8 = x^3+8 = x^3+2^3$ ناتج الضرب مجموع مكعبين

ii) $(y-3)(y^2+3y+9) = y^3+3y^2+9y-3y^2-9y-27 = y^3-27 = y^3-3^3$ ناتج الضرب الفرق بين مكعبين

iii) $(y+2)^3 = (y+2)(y+2)^2 = (y+2)(y^2+4y+4)$ مكعب مجموع حدين

$= y^3+4y^2+4y+2y^2+8y+8 = y^3+6y^2+12y+8$

iv) $(z-3)^3 = (z-3)(z-3)^2 = (z-3)(z^2-6z+9)$ مكعب الفرق بين حدين

$= z^3-6z^2+9z-3z^2+18z-27 = z^3-9z^2+27z-27$

مثال (5) **جد ناتج ضرب المقادير الجبرية الآتية:**

i) $(2v+5)(4v^2-10v+25) = 8v^3-20v^2+50v+20v^2-50v+125 = 8v^3+125 = (2v)^3+5^3$

ii) $(\frac{1}{3}-z)(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}z+z^2) = \frac{1}{27}+\frac{1}{9}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{9}z-\frac{1}{3}z^2-z^3 = \frac{1}{27}-z^3 = (\frac{1}{3})^3-z^3$

iii) $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}\,x+\sqrt[3]{4}) = x^3+\sqrt[3]{2}\,x^2+\sqrt[3]{4}\,x-\sqrt[3]{2}\,x^2-\sqrt[3]{4}\,x-\sqrt[3]{8}$

$= x^3+\sqrt[3]{2}\,x^2-\sqrt[3]{2}\,x^2+\sqrt[3]{4}\,x-\sqrt[3]{4}\,x-2 = x^3-2$

iv) $(x+\frac{1}{2})^3 = (x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})^2 = (x+\frac{1}{2})(x^2+x+\frac{1}{4}) = x^3+x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}$

$= x^3+x^2+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{8} = x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{4}x+\frac{1}{8}$

v) $(y-5)^3 = (y-5)(y-5)^2 = (y-5)(y^2-10y+25)$

$= y^3-10y^2+25y-5y^2+50y-125$

$= y^3-15y^2+75y-125$

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

الأسئلة (1 - 7) مشابهة للمثالين (2,3)

1. $(x + 3)(x - 3)$
2. $(\sqrt{7} - h)^2$
3. $(z + \sqrt{5})(z - \sqrt{5})$
4. $(v + 5)(v + 1)$
5. $(x - 3)(x - 2)$
6. $(3x - 4)(x + 5)$
7. $(\frac{1}{3}y + 3)(\frac{1}{3}y + 2)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

الأسئلة (8 - 13) مشابهة للمثالين (4,5)

8. $(y+2)(y^2 - 2y+4)$
9. $(2z + 4)(4z^2 - 8z + 16)$
10. $(v - \sqrt[3]{3})(v^2 + \sqrt[3]{3}\,v + \sqrt[3]{9})$
11. $(\sqrt[3]{\frac{2}{7}} + m)(\sqrt[3]{\frac{4}{49}} - \sqrt[3]{\frac{2}{7}}\,m + m^2)$
12. $(x + 5)^3$
13. $(y - 4)^3$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

14. $(n - 6)^2$
15. $(2x - 3)(x + 9)$
16. $(y + \sqrt{6})(y - \sqrt{6})$
17. $(4 - y)(5 - y)$

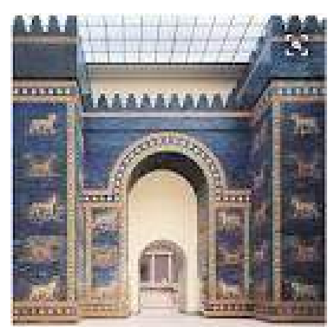
جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

18. $(x+6)(x^2 - 6x+36)$
19. $(z - 3)^3$
20. $(x - \sqrt[3]{4})(x^2 + \sqrt[3]{4}\,x + \sqrt[3]{16})$
21. $(\sqrt[3]{\frac{1}{5}} + n)(\sqrt[3]{\frac{1}{25}} - \sqrt[3]{\frac{1}{5}}\,n + n^2)$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



22 **مسبح:** يعد فندق بغداد أحد الفنادق السياحية المهمة في العاصمة العراقية بغداد، يبلغ طول المسبح فيه $(x + 9)$ أمتار وعرضه $(x + 1)$ متر، ومحاط بممرعرضه 1 متر. اكتب مساحة المسبح مع الممر بأبسط صورة بدلالة x .



23 **تأريخ:** تقع مدينة بابل شمال مدينة الحلة في العراق حيث عاش البابليون فيها منذ 3000 سنة قبل الميلاد تقريباً. وقد بنوا سنة 575م بوابة عشتار التي تعد البوابة الثامنة في سور مدينة بابل. رسم وائل لوحة فنية تمثل بوابة عشتار بالأبعاد $(y + 7)$ ، $(y - 4)$ سنتمترات. اكتب مساحة اللوحة التي رسمها وائل بأبسط صورة بدلالة y .



24 **أسماك زينة:** حوض سمك زينة مكعب الشكل طول حرفه $(v + 3)$ سنتمتر. اكتب حجم حوض الزينة بأبسط صورة بدلالة v.

فَكِّرْ

25 **تحدٍّ:** جد ناتج ما يأتي بأبسط صورة:

$$(x + 1)^2 - (x - 2)^2$$

26 **أُصحِّحُ الخطأ:** كتبت نسرين ناتج ضرب المقدارين الجبريين كالآتي:

$$(\sqrt{5}\, h - 4)\, (h - 6) = 5\, h^2 + 10\, h - 24$$

حدّد خطأ نسرين وصحّحه.

27 **حسٌّ عدديٌّ:** أيّ العددين أكبر؟ العدد $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ أم العدد $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$. وضّح إجابتك.

أُكتبْ

ناتج ضرب المقدارين الجبريين: $(2z + \frac{1}{2})\, (2z - \frac{1}{2})$

الدرسُ]2-2[

تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر
Factoring the Algebraic Expression by using a Greater Common Factor

فكرةُ الدرس
- تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر.

المفردات
- تحليل المقدار الجبري
- العامل المشترك الأكبر
- ثنائية الحد
- المعكوس
- التحقق من صحة الحل

تعلم

يعد نصب ساحة كهرمانة وسط بغداد من المعالم الحضارية المتميزة في العراق. يتوسط تمثالُ كهرمانة الساحة التي تقع في منطقة الكرادة ويبلغ نصف قطر قاعدة التمثال r متر ويحيط به حوض على شكل ممر دائري، إذا كان نصف قطر التمثال مع الحوض 2 + r متر، فجد مساحة الحوض.



]2-2-1[تحليل مقدار جبري باستعمال العامل المشترك الأكبر
Factoring the algebraic expression by using a greater common factor

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد العامل المشترك الأكبر للأعداد وكذلك تعلمت كيفية تحليل المقدار الجبري باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF)، والآن سوف تزيد مهارتك في تعلم كيفية تحليل مقادير جبرية مكوّنة من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر والتحقق من صحة الحل.

مثال (1) نصف قطر قاعدة تمثال كهرمانة r متر، ونصف قطر قاعدة التمثال مع الحوض 2 + r متر، جد مساحة الحوض .

مساحة التمثال $A_1 = r^2\pi$

مساحة التمثال مع الحوض $A_2 = (r+2)^2\,\pi = (r^2+4r+4)\pi = r^2\pi + 4r\pi + 4\pi$

مساحة الحوض $A = A_2 - A_1 = r^2\pi + 4r\pi + 4\pi - r^2\,\pi$

العامل المشترك الأكبر (4π) $= 4r\pi + 4\pi = 4\pi\,(r+1)$

مساحة الحوض المحيط بالتمثال $4\pi\,(r+1)$ متر مربع

مثال (2) **حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:**

i) $6x^3 + 9x^2 - 18x = 3x\,(2x^2 + 3x - 6)$ العامل المشترك الأكبر هو 3x

التحقق:

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

$3x\,(2x^2 + 3x - 6) = 3x\,(2x^2) + 3x\,(3x) - 6(3x)$
$= 6x^3 + 9x^2 - 18x$

ii) $\sqrt{12}\,y^2z + \sqrt{2}(\sqrt{6}\,yz^2 - \sqrt{24}\,yz)$ فتح القوس مع تبسيط الجذور العددية

$= 2\sqrt{3}\,y^2z + 2\sqrt{3}\,yz^2 - 4\sqrt{3}\,yz$ العامل المشترك الأكبر هو $2\sqrt{3}\,yz$

$= 2\sqrt{3}\,yz\,(y + z - 2)$

التحقق:

للتحقق استعمل عملية ضرب المقادير الجبرية

$2\sqrt{3}\,yz\,(y+z-2) = 2\sqrt{3}\,y^2z + 2\sqrt{3}\,yz^2 - 4\sqrt{3}\,yz$

نلاحظ المتغيرات متساوية في الحدود مع المقدار الأصلي وكذلك المعاملات العددية لأن:

$2\sqrt{3} = \sqrt{12}\,,\ 2\sqrt{3} = \sqrt{2}\,\sqrt{6}\,,\ 4\sqrt{3} = \sqrt{2}\,\sqrt{24}$

مثال (3) حلّل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

i) $5x(x+3) - 7(x+3) = (x+3)(5x-7)$ العامل المشترك الأكبر هو $(x+3)$

ii) $\frac{1}{2}(y-1) + \frac{1}{3}y^2(y-1) = (y-1)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}y^2)$ العامل المشترك الأكبر هو $(y-1)$

iii) $\sqrt{3}v^2(z+2) - \sqrt{5}v(z+2) = (z+2)(\sqrt{3}v^2 - \sqrt{5}v)$ العامل المشترك الأكبر هو $(z+2)$

$= v(z+2)(\sqrt{3}v - \sqrt{5})$

[2-2-2] تحليل مقدار جبري باستعمال التجميع
Factoring algebraic expression by grouping

تعلمت في الفقرة السابقة كيفية تحليل المقدار الجبري المكون من حدين أو ثلاثة حدود باستعمال العامل المشترك الأكبر، والآن سوف تتعلم كيفية تحليل مقدار جبري مكون من أربعة حدود أو أكثر باستعمال تجميع الحدود بحيث يوجد للحدود التي يمكن تجميعها عوامل مشتركة.

مثال (4) حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

i) $4x^3 - 8x^2 + 5x - 10 = (4x^3 - 8x^2) + (5x - 10)$ تجميع الحدود التي لها عوامل مشتركة

$= 4x^2(x-2) + 5(x-2)$ تحليل الحدود المجمعة

$= (x-2)(4x^2+5)$ العامل المشترك الأكبر هو $(x-2)$

التحقق:

$(x-2)(4x^2+5) = x(4x^2+5) - 2(4x^2+5)$ استعمال خاصية التوزيع

$= 4x^3 + 5x - 8x^2 - 10 = 4x^3 - 8x^2 + 5x - 10$ استعمال الضرب والترتيب

ii) $\sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t = (\sqrt{2}h^2t - \sqrt{8}h^2v) + (\sqrt{3}t^2v - \sqrt{12}v^2t)$ تجميع الحدود

$= \sqrt{2}h^2(t-2v) + \sqrt{3}tv(t-2v)$ تحليل الحدود المجمعة

$= (t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$ العامل المشترك الأكبر هو $(t-2v)$

التحقق:

$(t-2v)(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) = t(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv) - 2v(\sqrt{2}h^2 + \sqrt{3}tv)$ استعمال خاصية التوزيع

$= \sqrt{2}h^2t + \sqrt{3}t^2v - \sqrt{8}h^2v - \sqrt{12}v^2t$ استعمال الضرب والترتيب

مثال (5) حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

$14x^3 - 7x^2 + 3 - 6x = (14x^3 - 7x^2) + (3 - 6x)$ تجميع الحدود

$= 7x^2(2x-1) + 3(1-2x)$ تحليل الحدود المجمعة

$= 7x^2(2x-1) + 3(-1)(2x-1)$ استعمال المعكوس

$= 7x^2(2x-1) - 3(2x-1)$ كتابة $+3(-1)$ على شكل -3

$= (2x-1)(7x^2-3)$ العامل المشترك الأكبر هو $(2x-1)$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر(GCF) وتحقق من صحة الحل:

الأسئلة (1 - 4) مشابهة للمثال (2)

1. $9x^2 - 21x$
2. $10 - 15y + 5y^2$
3. $14z^4 - 21z^2 - 7z^3$
4. $\sqrt{8}\, t^2r + \sqrt{2}\,(tr^2 - \sqrt{3}\, tr)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

الأسئلة (5 - 8) مشابهة للمثال (3)

5. $3y(y - 4) - 5(y - 4)$
6. $\frac{1}{4}(t + 5) + \frac{1}{3}t^2(t + 5)$
7. $\sqrt{2}\, n(x + 1) - \sqrt{3}\, m(x + 1)$
8. $2x(x^2 - 3) + 7(x^2 - 3)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

الأسئلة (9 - 12) مشابهة للمثال (4)

9. $3y^3 - 6y^2 + 7y - 14$
10. $21 - 3x + 35x^2 - 5x^3$
11. $2r^2k + 3k^2v - 4r^2v - 6v^2k$
12. $3z^3 - \sqrt{18}\, z^2 + z - \sqrt{2}$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

الأسئلة (13 - 16) مشابهة للمثال (5)

13. $21y^3 - 7y^2 + 3 - 9y$
14. $\frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^3 + 5 - 10x$
15. $6z^3 - 9z^2 + 12 - 8z$
16. $5t^3 - 15t^2 - 2t + 6$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حلل كل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر(GCF) وتحقق من صحة الحل:

17. $12y^3 - 21y^2$
18. $6v^2(3v - 6) + 18v$

حلل المقدار التالي باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

19. $\frac{1}{7}(y + 1) + \frac{1}{3}y^2(y + 1)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

20. $5x^3 - 10x^2 + 10x - 20$
21. $3t^3k + 9k^2s - 6t^3s - 18s^2k$

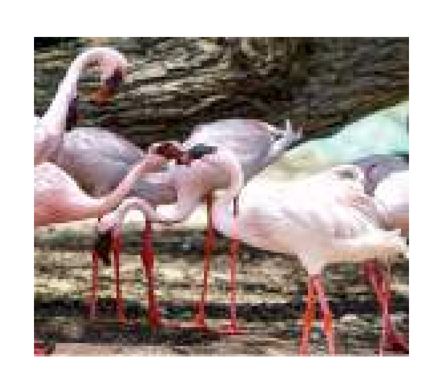
حلل المقدار التالي باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

22. $12x^3 - 4x^2 + 3 - 9x$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



23 **الطاقة الشمسية:** الألواح الشمسية هي المكون الرئيس في أنظمة الطاقة الشمسية التي تقوم بتوليد الكهرباء، وتصنع الخلايا من مواد شبه موصلة مثل السيليكون تمتص الضوء من الشمس. ما أبعاد اللوح الشمسي بدلالة x، إذا كانت المساحة $3x(x - 4) - 22(x - 4)$ أمتار مربعة؟



24 **طائر الفلامنكو:** طائر الفلامنكو، من جنس النحاميات وهو من الطيور المهاجرة التي تمتاز بشكلها الجميل ولونها الوردي، وتقطع مسافات بعيدة في أثناء موسم الهجرة السنوي مروراً بمنطقة الأهوار جنوبي العراق لتحصل على الغذاء من المسطحات المائية. إذا كانت مساحة المسطح المائي الذي غطّته طيور الفلامنكو في أحد الأهوار $4y^2 + 14y + 7(2y + 7)$ أمتار مربعة. فما شكل المسطح وما أبعاده بدلالة y ؟



25 **ساعة بغداد:** ساعة بغداد هي مبنى مرتفع تعلوه ساعة معلقة على برج لها أربعة أوجه، يقع المبنى ضمن منطقة ساحة الاحتفالات في بغداد وأُنشئت في سنة 1994م. ما نصف قطر الدائرة الداخلية للساعة بدلالة z إذا علمت انّ مساحتها $z^2\pi - 3z\pi - \pi(3z - 9)$ ؟

فَكِّرْ

26 **تحدٍّ:** حلّل المقدار التالي إلى أبسط صورة:

$$5x^5 y + 7y^3 z - 10x^5 z - 14z^2 y^2$$

27 **أُصحِّحُ الخطأ:** كتبت ابتسام ناتج تحليل المقدار التالي كما يأتي:

$$\sqrt{2}\, t^4 - \sqrt{24}\, t^3 + t^2 - \sqrt{12}\, t = (t + 2\sqrt{3})(\sqrt{2}\, t^2 - t)$$

اكتشف خطأ ابتسام وصحّحه.

28 **حسٌّ عدديٌّ:** ما العدد المجهول في المقدار $x^2 + 3x + 5x + 15 = (x + 3)(x + \square)$

أُكتبْ

ناتج طرح المقدار $(x + y)(x - y)$ من المقدار $(x + y)(x + y)$ بأبسط صورة.

الدرسُ]2-3[

تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات
Factoring the Algebraic Expression by using Special Identities

فكرةُ الدرس
- تحليل المقدار الجبري كفرق بين مربعين ومربع الكامل.

المفردات
- فرق بين مربعين
- مربع كامل
- الحد العام
- إكمال المربع
- الحد المفقود

تعلم

يعد ملعب الشعب الدولي في العاصمة العراقية بغداد من الملاعب المهمة في العراق إذ أُنشئَ عام 1966.
إذا كانت مساحة الساحة المخصّصة لكرة القدم التي تتوسط أرضيته يمثّلها المقدار $x^2 - 400$ متر مربع، فما أبعاد الساحة؟



]2-3-1[تحليل المقدار الجبري بالفرق بين مربعين
Factoring the algebraic expression by difference of two squares

تعرفت سابقاً الى كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر الأول يمثل مجموع حدين والآخر يمثل الفرق بينهما والناتج يمثل الفرق بين مربعيهما، والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب وهي تحليل المقدار الجبري الذي على صورة فرق بين مربعين $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$.

المقدار $x^2 + y^2$ لايتحلل في هذه المرحلة.

مثال (1) جد أبعاد ساحة كرة القدم التي مساحتها $x^2 - 400$ متر مربع.

اكتب كل حد على هيئة مربع كامل $\quad x^2 - 400 = (x)^2 - (20)^2$

اكتب التحليل $\quad = (x + 20)(x - 20)$

القوس الأول: الجذر التربيعي للحد الأول + الجذر التربيعي للحد الثاني

القوس الثاني: الجذر التربيعي للحد الأول - الجذر التربيعي للحد الثاني

لذا طول ساحة كرة القدم $x + 20$ متراً وعرضها $x - 20$ متراً

مثال (2) حلّل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

i) $x^2 - 9 = (x + 3)(x - 3)$

ii) $36y^2 - z^2 = (6y + z)(6y - z)$

iii) $49 - v^2 = (7 + v)(7 - v)$

iv) $2x^2 - z^2 = (\sqrt{2}x + z)(\sqrt{2}x - z)$

v) $5h^2 - 7v^2 = (\sqrt{5}h + \sqrt{7}v)(\sqrt{5}h - \sqrt{7}v)$

vi) $12 - t^2 = (2\sqrt{3} + t)(2\sqrt{3} - t)$

vii) $8x^3y - 2xy^3 = 2xy(4x^2 - y^2)$ التحليل باستعمال العامل المشترك

$= 2xy(2x + y)(2x - y)$ التحليل باستعمال الفرق بين المربعين

viii) $\frac{1}{16}z^4 - \frac{1}{81} = (\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{9}) = (\frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{9})(\frac{1}{2}z + \frac{1}{3})(\frac{1}{2}z - \frac{1}{3})$

[2-3-2] تحليل المقدار الجبري بالمربع الكامل
Factoring the algebraic expression by perfect square

تعلمت سابقاً كيفية إيجاد ناتج ضرب مربع مجموع حدين ومربع الفرق بين حدين وكان الناتج مؤلفاً من ثلاثة حدود، والآن سوف تتعلم العملية العكسية للضرب و هي تحليل مقدار مؤلف من ثلاثة حدود على صورة مربع كامل

$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$, $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

يكون المقدار الجبري $ax^2 \pm bx + c$ مربعاً كاملاً، إذا كان: $bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)(c)}$ حيث $a \neq 0$

مثال (3) حلل كل مقدار من المقادير التالية التي على صورة مربع كامل:

i) $x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2(x \times 3) + (3)^2$ اكتب الحد الأول والحد الأخير على هيئة مربع كامل

اكتب الحد الأوسط على هيئة ضعف جذر الحد الأول في جذر الحد الأخير

$= (x + 3)(x + 3)$ اكتب تحليل المقدار

$= (x + 3)^2$ التحليل النهائي على هيئة (جذر الحد الأخير + جذر الحد الأول)^2

ii) $y^2 - 4y + 4 = (y)^2 - 2(y \times 2) + (2)^2$

$= (y - 2)^2$ لاحظ الإشارة بين العددين هي إشارة الحد الأوسط

iii) $16z^2 - 8z + 1 = (4z)^2 - 2(4z \times 1) + (1)^2 = (4z - 1)^2$

مثال (4) حدد أيّ مقدارمن المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلّله:

i) $x^2 + 10x + 25$

$(x)^2$, $(5)^2$

$2(x)(5) = 10x$ مربع كامل

$x^2 + 10x + 25 = (x+5)^2$

ii) $y^2 + 14y + 36$

$(y)^2$, $(6)^2$

$2(y)(6) = 12y \neq 14y$ ليست مربعاً كاملاً

iii) $4 - 37v + 9v^2$

$(2)^2$, $(3v)^2$

$-2(2)(3v) = -12v \neq -37v$

ليست مربعاً كاملاً

iv) $9h^2 - 6h + 3$

$(3h)^2$, $(\sqrt{3})^2$

$-2(3h)(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3}h \neq -6h$

ليست مربعاً كاملاً

مثال (5) اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّه:

i) $25x^2 - \ldots\ldots + 49$ لتصبح مربعاً كاملاً نطبق قانون الحد الأوسط $bx = \pm 2\sqrt{(ax^2)(c)}$

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} \Rightarrow bx = 2\sqrt{(25x^2)(49)} \Rightarrow bx = 70x$

$\Rightarrow 25x^2 - 70x + 49 = (5x - 7)^2$

ii) $\ldots\ldots + 8x + 16$

$bx = 2\sqrt{(ax^2)(c)} \Rightarrow 8x = 2\sqrt{(ax^2)(16)} \Rightarrow 64x^2 = 4 \times 16 \times ax^2 \Rightarrow ax^2 = x^2$

$\Rightarrow x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$

iii) $y^2 + 14y + \ldots\ldots$

$by = 2\sqrt{(ay^2)(c)} \Rightarrow 14y = 2\sqrt{(y^2)(c)} \Rightarrow 196y^2 = 4 \times y^2 \times c \Rightarrow c = 49$

$\Rightarrow y^2 + 14y + 49 = (y + 7)^2$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار من المقادير التالية كفرق بين مربعين:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثال (2)

1. $x^2 - 16$
2. $36 - 4x^2$
3. $h^2 - v^2$
4. $9m^2 - 4n^2$
5. $27x^3z - 3xz^3$
6. $\frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{16}$

حلل كل مقدار من المقادير التالية كمربع كامل:

الأسئلة (7 - 10) مشابهة للمثال (3)

7. $y^2 - 8y + 16$
8. $9z^2 - 6z + 1$
9. $v^2 + 2\sqrt{3}\,v + 3$
10. $4h^2 - 20h + 25$

حدد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

الأسئلة (11 - 14) مشابهة للمثال (4)

11. $x^2 + 18x + 81$
12. $16 - 14v + v^2$
13. $64h^2 - 48h - 9$
14. $3 - 4\sqrt{3}\,t + 4t^2$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلّله:

الأسئلة (15 - 18) مشابهة للمثال (5)

15. $.... + 14y + 49$
16. $z^2 + 4z + ...$
17. $3 - ..... + 9x^2$
18. $4x^2 + 2\sqrt{5}\,x + ...$

تدربْ وحلّ التمرينات

حلِّل كل مقدار من المقادير التالية إلى أبسط صورة:

19. $25 - 4x^2$
20. $y^2 - 121$
21. $12 - 3t^2$
22. $8y^3x - 2x^3y$
23. $\frac{1}{3}z^5 - \frac{1}{12}z$
24. $4x^2 + 20x + 25$
25. $16n^2 + 8\sqrt{3}\,n + 3$
26. $4t^3 - 12t^2 + 9t$

حدِّد أي مقدار من المقادير التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

27. $4x^2 + 18x + 16$
28. $y^2 + 10y + 25$
29. $2h^2 - 12h - 18$
30. $4v^2 + 4v + 4$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

31. $y^2 + ... + 36$
32. $25 - 20x + ...$
33. $5 - ..... + 16x^2$
34. $81 + 18z + ...$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



35 **المئذنة الملوية:** تقع منارة المئذنة الملوية في مدينة سامراء العراقية، وتعد إحدى معالم العراق المميزة بسبب شكلها الفريد، فهي إحدى آثار العراق القديمة المشهورة التي تعود لعصر حكم الدولة العباسية، وترتكز على قاعدة مربعة مساحتها $x^2 - 8x + 16$ متراً مربعاً. ما طول ضلع القاعدة التي تستند عليها الملوية بدلالة x ؟



36 **مزرعة أبقار:** لدى سعد مزرعة أبقار مربعة الشكل طول ضلعها x متر،وسَّعَها لتصبحَ مستطيلةَ الشكل فأصبحت مساحةُ المزرعة $x^2 - 81$ متراً مربعاً، ما طول المزرعة وعرضها بعد التوسعة بدلالة x ؟



37 **لوحة فنية:** رسمَ بشار لوحة فنية تمثل منطقة الأهوار في جنوب العراق، فكان المقدار $4x^2 - 8x + 9$ سنتمترات مربعة يمثل مساحة اللوحة الفنية. أَيمثّلُ مقدارُ مساحةِ اللوحة الفنية مربعاً كاملاً أم لا ؟

فَكِّرْ

38 **تحدٍّ:** هل المقدار التالي يمثّلُ مربعاً كاملاً أم لا؟ معلّلاً إجابتك.

$$\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{6}x + \frac{1}{16}$$

39 **أُصحِّحُ الخطأ:** قالت منتهى إنّ المقدار $(2x-1)(2x+1)$ هو تحليل للمربع الكامل $4x^2 - 4x + 1$.
حدّد خطأ منتهى وصحّحهُ.

40 **حسٌّ عدديٌّ:** أيمثّلُ المقدارُ $9x^2 + 12x - 4$ مربعاً كاملاً أم لا ؟ وضّح إجابتك.

أُكتبْ

تحليل للمقدار $4x^2 - 8x + 4$.

الدرسُ]2-4[

تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

Factoring the Algebraic Expression of three terms by Probe and Error

فكرةُ الدرس

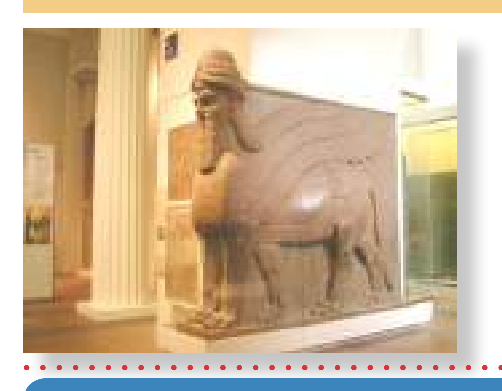
- تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود باستعمال التجربة

المفردات

- الوسطان
- الطرفان
- الحد الأوسط

تعلم

الثور المجنّح الآشوري (شيدو لاماسو) هكذا يرد اسمه في الكتابات الآشورية، وأصلُ كلمة لاماسو هو من لاموو Lammu السومرية ويوجد تمثال له في متحف مدينة الموصل. ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنّح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمتراً مربعاً ؟



]2-4-1[تحليل المقدار الجبري x^2+bx+c

Factoring the algebraic expression x^2+bx+c

تعرفت سابقاً الى كيفية إيجاد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر كل منهما مكوّن من حدين:

i) $(x+2)(x+3) = x^2+5x+6$, ii) $(x+3)(x-5) = x^2-2x-15$, iii) $(x-1)(x-4) = x^2-5x+4$

والآن سوف تتعلم العملية العكسية لعملية الضرب و هي تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود x^2+bx+c باستعمال التجربة.

ولتحليل المقدار الجبري، نجد عددين حقيقيين n , m بحيث $n + m = b$ ، $nm = c$ ونكتب

$$x^2 + bx + c = (x + n)(x + m)$$

مثال (1) ما أبعاد اللوحة الفنية للثور المجنّح التي مساحتها $x^2 + 10x + 21$ سنتمتراً مربعاً ؟

لتحليل المقدار الجبري نتّبع الخطوات الآتية:

عوامل العدد 21	مجموع العاملين
(1) (21)	1 + 21 = 22
(3) (7)	3 + 7 = 10
(-3) (-7)	(-3)+(-7) = -10

حاصل ضرب الطرفين $+7x$

حاصل ضرب الوسطين $+3x$

بالجمع ---------------------

الحد الأوسط $+10x$

$$x^2 + 10x + 21 = (x + 3)(x + 7)$$

(الطرفين ، الوسطين)

عرض اللوحة الفنية هو $x+3$ سنتمتر

طول اللوحة الفنية هو $x+7$ سنتمتر

ملاحظة: أُهملت عوامل العدد $(-7)(-3)=21$ لأنّ إشارة الحد الوسط موجبة.

مثال (2) حلل المقدار الجبري: $y^2 + y - 12$

عوامل العدد -12	مجموع العاملين
(1) (-12)	1 - 12 = -11
(12) (-1)	12 - 1 = 11
(2) (-6)	2 - 6 = -4
(6) (-2)	6 - 2 = 4
(3) (-4)	3 - 4 = -1
(4) (-3)	4 - 3 = 1

حاصل ضرب الطرفين $+4y$

حاصل ضرب الوسطين $-3x$

بالجمع ---------------------

الحد الأوسط $+y$

$$y^2 + y - 12 = (y - 3)(y + 4)$$

مثال (3) حلل المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

i) $z^2 - z - 6 = (z - 3)(z + 2)$ الحد الأوسط $2z - 3z = -z$

ii) $x^2 - 9x + 18 = (x - 3)(x - 6)$ الحد الأوسط $-6x - 3x = -9x$

iii) $y^2 + 6y - 27 = (y + 9)(y - 3)$ الحد الأوسط $-3y + 9y = +6y$

iv) $x^2 - xy - 20y^2 = (x - 5y)(x + 4y)$ الحد الأوسط $+4xy - 5xy = -xy$

v) $15 - 8z + z^2 = (5 - z)(3 - z)$ الحد الأوسط $-5z - 3z = -8z$

[2-4-2] تحليل المقدار الجبري ax^2+bx+c وإن $a \neq 0$

Factoring the algebraic expression ax^2+bx+c and $a \neq 0$

الآن سوف تتعرف إلى كيفية تحليل مقدار جبري من ثلاثة حدود على الصورة ax^2+bx+c وإنّ $a \neq 0$

مثال (4) حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

i) $\mathbf{6x^2 + 17x + 7}$

نجد عوامل العددين 7 ، 6 وكما يأتي:

$$6 = \begin{cases} (1)(6) \\ (2)(3) \end{cases} \quad , 7 = (1)(7)$$

$(1)(6) \quad (1)(7) \Rightarrow (1)(1) + (6)(7) = 43$

$(1)(7) + (6)(1) = 13$

$(2)(3) \quad (1)(7) \Rightarrow (2)(1) + (3)(7) = 23$

$(2)(7) + (3)(1) = 17$

حاصل ضرب الطرفين $+14y$

حاصل ضرب الوسطين $+3x$

الحد الأوسط $+17x$

$6x^2 + 17x + 7 = (2x + 1)(3x + 7)$

ii) $\mathbf{7y^2 - 26y - 8}$

نجد عوامل العددين 7 ، 8 وكما يأتي:

$$8 = \begin{cases} (1)(8) \\ (2)(4) \end{cases} \quad , 7 = (1)(7)$$

$(1)(1) - (8)(7) = -55$

$(1)(7) - (8)(1) = -1$

$(2)(1) - (4)(7) = -26$

$(2)(7) - (4)(1) = 10$

حاصل ضرب الطرفين $-28y$

حاصل ضرب الوسطين $+2y$

الحد الأوسط $-26y$

$7y^2 - 26y - 8 = (7y + 2)(y - 4)$

مثال (5) حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

i) $3z^2 - 17z + 10 = (3z - 2)(z - 5)$ الحد الأوسط $-15z - 2z = -17z$

ii) $4v^2 - v - 3 = (4v + 3)(v - 1)$ الحد الأوسط $-4v + 3v = -v$

iii) $15 + 11h + 2h^2 = (5 + 2h)(3 + h)$ الحد الأوسط $+5h + 6h = 11h$

iv) $6x^2 - 51x + 63 = 3(2x^2 - 17x + 21) = 3(x - 7)(2x - 3)$ الحد الأوسط $-3x - 14x = -17x$

v) $3x^2 - 10xy + 3y^2 = (3x - y)(x - 3y)$ الحد الأوسط $-9xy - xy = -10xy$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للأمثلة (1,3)

1. $x^2 + 6x + 8$
2. $1 - 2z + z^2$
3. $x^2 - 13x + 12$
4. $3 + 2z - z^2$
5. $x^2 - 2x - 3$
6. $15 - 8z + z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (7 - 14) مشابهة للمثالين (4,5)

7. $2x^2 + 5x + 3$
8. $3y^2 - 14y + 8$
9. $3x^2 - 10x + 8$
10. $8 - 25z + 3z^2$
11. $5y^2 - y - 6$
12. $6 + 29z - 5z^2$
13. $x^2 - 9xy + 20y^2$
14. $3y^2 - 19yx - 14x^2$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

الأسئلة (15 - 18) مشابهة للأمثلة (1,5)

15. $x^2 + 9x + 20 = (x\ldots4)(x\ldots5)$
16. $y^2 - 12y + 20 = (y\ldots2)(y\ldots10)$
17. $6x^2 - 7x + 2 = (2x\ldots1)(3x\ldots2)$
18. $20 - 7y - 3y^2 = (5\ldots3y)(4\ldots y)$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

19. $x^2 + 9x + 14$
20. $y^2 - 5y + 6$
21. $3 + 2z - z^2$
22. $x^2 - 2x - 3$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

23. $2x^2 + 12x - 14$
24. $4y^2 - 6y + 2$
25. $10 + 9z - 9z^2$
26. $2x^2 + 3x + 1$
27. $13y^2 - 11y - 2$
28. $30x^2 - xy - y^2$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

29. $x^2 + x - 20 = (x\ldots4)(x\ldots5)$
30. $35 + 3y - 2y^2 = (5\ldots y)(7\ldots2y)$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



31 **قلعة الأخيضر:** هي قلعة أثرية تقع في محافظة كربلاء وسط العراق ولا تزال أطلال القلعة قائمةً إلى يومنا هذا، الأخيضر من الحصون الدفاعية الفريدة من نوعها ويحيط به سور عظيم مستطيل الشكل. ما أبعاد السور الخارجية بدلالة x، إذا كانت مساحة القلعة مع السور يمثّلها المقدار $6x^2 - 39x + 60$ متراً مربعاً؟



32 **ألعاب ترفيهية:** تعد أرجوحة ديسكفري من الألعاب الخطرة في مدينة الألعاب، ويمثل المقدار $5t^2 + 5t - 30$ مسار أرجوحة ديسكفري في مدينة الألعاب، إذ t يمثل زمنَ الحركة. وتحليل المقدار يساعد على معرفة الوقت الذي تستغرقه أرجحتُها في المرة الأولى. حلّل المقدار.



33 **مترو الأنفاق:** يعد مترو الأنفاق نظامَ سكك حديد تحت الأرض تسير عليه القطارات، وهو أحد وسائل النقل السريعة في المدن الكبيرة وذات الكثافة السكانية العالية، ويتألف كل قطار من عدة عربات، فإذا كان المقدار $14y^2 - 23y + 3$ يمثل مساحة أرضية العربة بالمتر المربع، فما أبعادها بدلالة y ؟

فَكِّرْ

34 **تحدٍّ:** حلّل المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$4x^3 + 4x^2 - 9x - 9$$

35 **أُصحّحُ الخطأ:** حلّل سعد المقدارَ $6z^2 - 16z - 6$ كما يأتي:

$$6z^2 - 16z - 6 = (3z - 1)(2z + 6)$$

اكتشف خطأ سعد وصحّحه.

36 **حسٌّ عدديٌّ:** أيُمكن تحديدُ ما أذا كانت إشارات القوسين في تحليل المقدار $x^2 - 12x + 35$ مختلفة أم متشابهة ومن دون تحليل المقدار؟ وضّح إجابتَك.

أُكتبْ

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليلُ المقدار الجبري صحيحاً:

$$6z^2 + 5z - 56 = (3z \dots 8)(2z \dots 7)$$

الدرسُ]2-5[

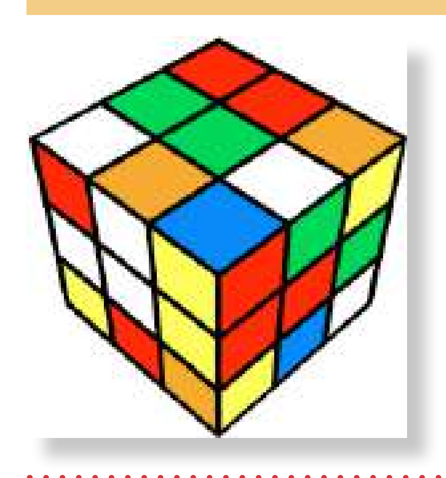
تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو الفرق بين مكعبين
Factoring the Algebraic Expression sum of two cubes or difference between two cubes

فكرةُ الدرس
• تحليل المقدار الجبري من حدين الذي على صورة مجموع (فرق بين) مكعبين.

المفردات
• مجموع مكعبين
• فرق بين مكعبين

تعلم

مكعب روبيك هو لغز ميكانيكي ثلاثي الأبعاد اخترعه النحّات وأستاذ العمارة المَجَري إرنو روبيك عام 1974. ما مجموع حجمَي مكعّبَي روبك الأول طول حرفه 3dcm والثاني طول حرفه 4dcm ؟



]2-5-1[تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين
Factoring the algebraic expression sum of two cubes

تعلّمتَ في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة مجموع مكعبين مثل: ($(x + 2)(x^2 - 2x + 4) = x^3 + 8 = x^3 + 2^3$)، والآن سوف تتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة مجموع مكعبين:

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$$ حيث $$x = \sqrt[3]{x^3} \;,\; y = \sqrt[3]{y^3}$$

مثال (1) من تعلّم، ما مجموع حجمَي مكعّبَي روبك الأول طول حرفه 3 dcm والثاني طول حرفه 4 dcm ؟

حجم المكعب = الطول×العرض×الارتفاع = (طول الحرف)³

$v_1 + v_2 = 3^3 + 4^3$

قانون تحليل مجموع مكعبين

$= (3 + 4)(3^2 - 3 \times 4 + 4^2)$

$= 7(9 - 12 + 16) = 7 \times 13 = 91 dcm^3$

مثال (2) حلّل كلَّ مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 + 5^3 = (x + 5)(x^2 - 5x + 5^2) = (x + 5)(x^2 - 5x + 25)$

ii) $y^3 + 8 = y^3 + 2^3 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$

iii) $8z^3 + 27 = 2^3z^3 + 3^3 = (2z)^3 + 3^3 = (2z + 3)(4z^2 - 6z + 9)$

iv) $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{4^3} = (\frac{1}{a} + \frac{1}{4})(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{4a} + \frac{1}{16})$

v) $\frac{27}{x^3} + \frac{8}{125} = \frac{3^3}{x^3} + \frac{2^3}{5^3} = (\frac{3}{x})^3 + (\frac{2}{5})^3 = (\frac{3}{x} + \frac{2}{5})(\frac{9}{x^2} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{25})$

vi) $\frac{1}{2}t^3 + 4 = \frac{1}{2}(t^3 + 8) = \frac{1}{2}(t^3 + 2^3) = \frac{1}{2}(t + 2)(t^2 - 2t + 4)$

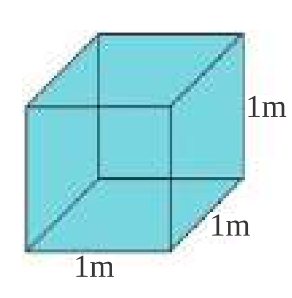
vii) $0.008 + v^3 = (0.2)^3 + v^3 = (0.2 + v)(0.04 - 0.2v + v^2)$

[2-5-2] تحليل المقدار الجبري فرق بين مكعبين
Factoring the algebraic expression difference between two cubes

تعلمت في الدرس الأول من هذا الفصل ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود وناتج ضربهما مقدار على صورة فرق بين مكعبين مثل: $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) = x^3 - 27 = x^3 - 3^3$، والآن سوف تتعلم العملية العكسية وهي تحليل المقدار الجبري المؤلف من حدين والذي على صورة فرق بين مكعبين:

$x^3 - y^3 = (x - y)\,(x^2 + x\,y + y)$ حيث $x = \sqrt[3]{x^3}\ ,\ \ y = \sqrt[3]{y^3}$

مثال (3) حوض مكعب الشكل طول حرفه 1m مملوء بالماء، أُفرِغَ الماءُ منه في حوض آخر أكبر منه مكعب الشكل طول حرفه 1.1m . ما كمية الماء الإضافية التي نحتاج إليها ليمتلئ الحوضُ الكبير؟



كمية الماء الإضافية اللّازمة = حجم المكعب الكبير - حجم المكعب الصغير

$v_2 - v_1 = (1.1)^3 - 1^3$

$= (1.1 - 1)\,(\ (1.1)^2 + 1.1 \times 1 + 1^2\ )$ قانون تحليل الفرق بين مكعبين

$= 0.1\,(1.21 + 1.1 + 1) = 0.1 \times 3.31 = 0.331\ m^3$

مثال (4) حلّل كلَّ مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

i) $x^3 - 3^3 = (x - 3)\,(x^2 + 3x + 3^2) = (x - 3)\,(x^2 + 3x + 9)$

ii) $y^3 - 64 = y^3 - 4^3 = (y - 4)\,(y^2 + 4y + 16)$

iii) $27z^3 - 8 = 3^3z^3 - 2^3 = (3z)^3 - 2^3 = (3z - 2)\,(9z^2 + 6z + 4)$

iv) $\frac{1}{b^3} - \frac{1}{125} = \frac{1}{b^3} - \frac{1}{5^3} = (\frac{1}{b} - \frac{1}{5})(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{5b} + \frac{1}{25})$

v) $\frac{1}{3}t^3 - 9 = \frac{1}{3}(t^3 - 27) = \frac{1}{3}(t^3 - 3^3) = \frac{1}{3}(t - 3)\,(t^2 + 3t + 9)$

vi) $0.216 - n^3 = (0.6)^3 - n^3 = (0.6 - n)\,(0.36 + 0.6n + n^2)$

vii) $1 - 0.125\,z^3 = 1 - (0.5)^3 z^3 = (1 - 0.5z)\,(1 + 0.5z + 0.25z^2)$

viii) $32 - \frac{1}{2}m^3 = \frac{1}{2}(64 - m^3) = \frac{1}{2}(4^3 - m^3) = \frac{1}{2}(4 - m)\,(16 + 4m + m^2)$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (1 - 8) مشابهة للمثالين (1,2)

1. $y^3 + 216$
2. $x^3 + z^3$
3. $125 + 8z^3$
4. $\frac{1}{27}x^3 + \frac{1}{8}$
5. $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{64}$
6. $\frac{1}{3}t^3 + 9$
7. $0.125 + v^3$
8. $1 + 0.008z^3$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

الأسئلة (9 - 16) مشابهة للمثالين (3,4)

9. $a^3 - 8^3$
10. $8y^3 - 64$
11. $\frac{1}{c^3} - \frac{1}{8}$
12. $\frac{1}{2}v^3 - 4$
13. $0.125 - m^3$
14. $25 - \frac{1}{5}n^3$
15. $3b^3 - 81$
16. $0.216v^3 - 0.008t^3$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

17. $6^3 + x^3$
18. $125y^3 + 1$
19. $\frac{1}{64} + \frac{8}{125}y^3$
20. $\frac{1}{5}v^3 + 25$
21. $0.125x^3 + 0.008y^3$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

22. $y^3 - 64$
23. $\frac{1}{x^3} - \frac{27}{8}$
24. $9 - \frac{1}{3}n^3$
25. $25c^3 - \frac{1}{5}$
26. $0.001x^3 - 0.008y^3$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



27 **مكتبة:** مكتبة مدينة شتوتغارت هي واحدة من أجمل المكتبات في العالم وأفخمها وتقع في ألمانيا، كما أنها من أكثر المكتبات تماشياً مع متطلبات التعليم الحديثة. بناية المكتبة على شكل مكعب طول حرفه $13\frac{1}{2} - \frac{1}{2}y^3$ متر. حلّل المقدار الذي يمثل طول حرفه.



28 **حوض سمك:** حوض سمك الزينة حجمه $25x^3$ متراً مكعباً، وُضِعَ في داخله حجر مكعب الشكل حجمه $\frac{1}{5}$ متر مكعب، مُلِئَ بالماء كاملاً. اكتب المقدار الذي يمثّل حجمَ الماء ثم حلّله ؟



29 **سكن:** بدأتِ المنازلُ تأخذ أشكالاً مختلفةً في التصميم مع تطور هندسة العمارة فصُمِّمَتْ هذه المنازل على شكل مكعبات. فإذا كان حجم المنزل الأول $\frac{8}{a^3}$ متر مكعب، وحجم المنزل الثاني $\frac{27}{b^3}$ متر مكعب. اكتب حجم المنزلين معاً ثم حلّل المقدار.

فَكِّرْ

30 **تحدٍّ:** حلل المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$0.002z^3 - 0.016y^3$$

31 **أُصحِّحُ الخطأ:** حلّلت بشرى المقدار $8v^3 - 0.001$ كما يأتي:

$$8v^3 - 0.001 = (2v + 0.1)(4v^2 - 0.4v + 0.01)$$

اكتشف خطأ بشرى وصحِّحهُ.

32 **حسٌّ عدديٌّ:** هل يمكن جمع العددين 27 ، 8 بطريقة تحليل مجموع مكعبين؟ وضّح إجابتك.

أُكتبْ

الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليلُ المقدار الجبري صحيحاً:

$$125 - x^3 = (5 \dots x)(25 \dots 5x \dots . x^2)$$

الدرسُ [2-6]

تبسيط المقادير الجبرية النسبية
Simplifying Rational Algebraic Expressions

فكرةُ الدرس

- ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها وكتابتها بأبسط صورة.
- جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها وكتابتها بأبسط صورة.

المفردات

- النسبة ، الكسر

تعلم

اشترى حسن مجموعةً من باقات الزهور بمبلغ $x^2 - x - 6$ دينار، فكانت كلفةُ باقة الزهور الواحدة عليه $2x - 6$ دينار.
اكتب نسبة ثمن الباقة الواحدة إلى الثمن الكلّي لباقات الزهور وبأبسط صورة.



[2-6-1] تبسيط ضرب المقادير الجبرية النسبية وقسمتها
Simplifying multiplying and dividing rational algebraic expressions

تعرّفتَ سابقاً إلى خواص الأعداد النسبية والحقيقية وتعلمت كيفيةَ تبسيط الجُمَل العددية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وترتيب العمليات، والآن سوف تتعلم كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، وتكرار الأمر بحيث لايبقى مجال لذلك، وعندئذٍ نقول إنّ المقدار على أبسط صورة (simplest form).

مثال (1) أُكتب نسبةَ ثمن باقة الزهور الواحدة إلى الثمن الكلّي للباقات بأبسط صورة.

حلّل البسط والمقام

$$\frac{\text{ثمن باقة الزهور}}{\text{ثمن الباقات الكلية للزهور}} = \frac{2x - 6}{x^2 - x - 6} = \frac{2(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

بقسمة كل من البسط والمقام على العامل المشترك

$$= \frac{2\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+2)} = \frac{2}{x+2}$$

مثال (2) أُكتب كلّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

i) $\frac{x^2 - 4}{(x^2 - 4x + 4)} = \frac{(x+2)(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{(x-2)\cancel{(x-2)}} = \frac{x+2}{x-2}$

ii) $\frac{5z + 10}{z - 3} \times \frac{z^3 - 27}{(z^2 + 6z + 8)} = \frac{5\cancel{(z+2)}}{\cancel{z-3}} \times \frac{\cancel{(z-3)}(z^2 + 3z + 9)}{\cancel{(z+2)}(z+4)} = \frac{5(z^2 + 3z + 9)}{z + 4}$

iii) $\frac{16 - x^2}{3x + 5} \times \frac{(3x^2 + 2x - 5)}{(x^2 + 3x - 4)} = \frac{(4+x)(4-x)}{\cancel{(3x+5)}} \times \frac{\cancel{(3x+5)}\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+4)}\cancel{(x-1)}} = 4 - x$

iv) $\frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \div \frac{(2+t)^3}{t^2 + 9t + 14} = \frac{8 + t^3}{4 - 2t + t^2} \times \frac{t^2 + 9t + 14}{(2+t)^3}$ اِضرب الأول في مقلوب الثاني

$= \frac{\cancel{(2+t)}\cancel{(4 - 2t + t^2)}}{\cancel{(4 - 2t + t^2)}} \times \frac{\cancel{(t+2)}(t+7)}{(2+t)^3} = \frac{t+7}{2+t} = \frac{t+7}{t+2}$ حلّل البسطَ والمقامَ وقسّم على العامل المشترك

[2-6-2] تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية وطرحها
Simplifying adding and subtracting rational algebraic expressions

تعلمت سابقاً كيفية تحليل المقادير الجبرية وكذلك كيفية إيجاد مضاعف مشترك أصغر (LCM: يمثل حاصل ضرب العوامل المشتركة بأكبر أس وغير المشتركة) عند تبسيط جمل عددية كسرية، والآن سوف تتعلم كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك وتبسيط المقدار على أبسط صورة (simplest form).

مثال (3) أكتب المقدارَ الجبريَّ النسبيَّ بأبسطِ صورةٍ:

$$\frac{y^2}{(y+2)} - \frac{4}{(y+2)}$$

المضاعف المشترك الأصغر $(y + 2)$

$$= \frac{y^2 - 4}{(y+2)}$$

تحليل البسط على صورة فرق بين مربعين

$$= \frac{\cancel{(y+2)}(y-2)}{\cancel{(y+2)}} = y - 2$$

بقسمة كل من البسط والمقام على $y + 2$

مثال (4) أكتب كلَّ مقدارٍ من المقاديرِ التاليةِ بأبسطِ صورةٍ:

i) $\frac{7x-14}{x^2-4} + \frac{5}{(x+2)} = \frac{7(x-2)}{(x+2)(x-2)} + \frac{5}{x+2}$

بتحليل البسط والمقام

$= \frac{7}{x+2} + \frac{5}{x+2}$

المضاعف المشترك الأصغر $(x + 2)$

$= \frac{7+5}{x+2} = \frac{12}{x+2}$

ii) $\frac{4z}{2z-5} - \frac{z}{z+3} = \frac{4z}{2z-5} \times \left(\frac{z+3}{z+3}\right) - \frac{z}{z+3} \times \left(\frac{2z-5}{2z-5}\right)$

المضاعف المشترك الأصغر $(2z - 5)(z + 3)$

$= \frac{4z(z+3) - z(2z-5)}{(2z-5)(z+3)} = \frac{2z^2 + 17z}{(2z-5)(z+3)} = \frac{z(2z+17)}{(2z-5)(z+3)}$

iii) $\frac{t^2+2t+4}{t^3-8} + \frac{12}{3t-6} = \frac{t^2+2t+4}{(t-2)(t^2+2t+4)} + \frac{12}{3(t-2)} = \frac{1}{(t-2)} + \frac{4}{(t-2)} = \frac{5}{(t-2)}$

iv) $\frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{v^2-16} = \frac{8}{v+4} + \frac{2}{v-4} - \frac{1}{(v+4)(v-4)} = \frac{8(v-4) + 2(v+4) - 1}{(v+4)(v-4)}$

$= \frac{8v - 32 + 2v + 8 - 1}{(v+4)(v-4)} = \frac{10v - 25}{(v+4)(v-4)} = \frac{5(2v-5)}{(v+4)(v-4)}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

أكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثالين (1,2)

1) $\dfrac{2z^2 - 4z + 2}{z^2 - 7z + 6}$

2) $\dfrac{y^3 + 27}{y^3 - 3y^2 + 9y}$

3) $\dfrac{5x + 3}{x + 3} \times \dfrac{x^2 + 5x + 6}{25x^2 - 9}$

4) $\dfrac{z^2 + 7z - 8}{z-1} \times \dfrac{z^2 - 4}{z^2 + 6z - 16}$

5) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4x + 4} \times \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - x - 6}$

6) $\dfrac{2y^2 - 2y}{y^2 - 9} \div \dfrac{y^2 + y - 2}{y^2 + 2y - 3}$

أكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

الأسئلة (7 - 12) مشابهة للمثالين (3,4)

7) $\dfrac{2}{x^2 - 9} + \dfrac{3}{x^2 - 4x + 3}$

8) $\dfrac{2y^3 - 128}{y^3 + 4y^2 + 16y} - \dfrac{y - 1}{y}$

9) $\dfrac{z^2 + z + 1}{z^4 - z} - \dfrac{z + 3}{z^2 + 2z - 3}$

10) $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1} - 1$

11) $\dfrac{3}{z - 1} + \dfrac{2}{z + 3} + \dfrac{8}{z^2 + 2z - 3}$

12) $\dfrac{y - 3}{y - 1} + \dfrac{5y - 15}{(y - 3)^2} - \dfrac{3y + 1}{y^2 - 4y + 3}$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

أكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

13) $\dfrac{x + 5}{12x} \times \dfrac{6x - 30}{x^2 - 25}$

14) $\dfrac{3 - x}{4 - 2x} \times \dfrac{x^2 + x - 6}{9 - x^2}$

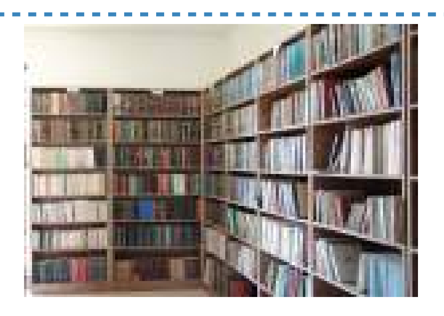
15) $\dfrac{y^2 - 7y}{y^3 - 27} \div \dfrac{y^2 - 49}{y^2 + 3y + 9}$

أكتب كلَّ مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

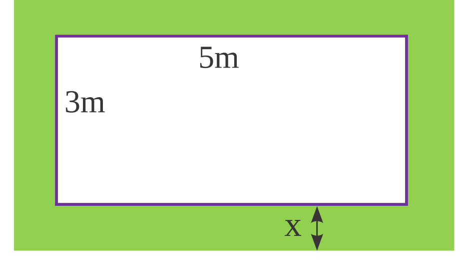
16) $\dfrac{5}{x^2 - 36} - \dfrac{2}{x^2 - 12x + 36}$

17) $\dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{2}{x - 2} + \dfrac{4 + 2x + x^2}{x^3 - 8}$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



18 **مكتبة:** إذا كان المقدار الجبري $x^2 - 4$ يمثل عدد الكتب العلمية في المكتبة، والمقدار الجبري $x^2 + x - 6$ يمثل عدد الكتب الأدبية فيها. اكتب نسبةَ الكتب العلمية إلى الكتب الأدبية بأبسط صورة.



19 **هندسة:** مستطيل أبعاده 3 ، 5 أمتار وُسِّعَ إلى مستطيل أكبر وذلك بإحاطته بممر عرضه x متر. اكتب المقدارالجبري الذي يمثل مجموع نسبتي طول المستطيل قبل التوسيع إلى طوله بعد التوسيع ونسبة عرض المستطيل قبل التوسيع إلى عرضه بعد التوسيع بأبسط صورة.



20 **ألعاب نارية:** المقدار الجبري $20 + 15t - 5t^2$ يمثل الارتفاع بالأمتار لقذيفة ألعاب نارية أُطلِقَت من سطح بناية ارتفاعها 20 متراً، إذ t تمثل زمن وصول القذيفة بالثواني إلى الهدف. والمقدار الجبري $4 + 19t - 5t^2$ يمثل ارتفاع قذيفة أخرى أُطلِقَت من سطح بناية ارتفاعها 4 أمتار. اكتب نسبة ارتفاع القذيفة الأولى إلى ارتفاع القذيفة الثانية بأبسط صورة.

فَكِّرْ

21 **تحدٍّ:** بسِّط المقدار الجبري التالي إلى أبسط صورة:

$$\frac{y^2 - 5}{2y^3 - 16} \div \frac{y - \sqrt{5}}{2y^2 + 4y + 8}$$

22 **أُصحِّحُ الخطأ:** بسَّطَتْ سماح المقدار الجبري وكتبته بأبسط صورة كما يأتي:

$$\frac{z^2 - z - 30}{5 + z} \times \frac{2z + 12}{z^2 - 36} = 1$$

اكتشف خطأ سماح وصحّحه.

23 **حسٌّ عدديٌّ:** ما ناتج جمع المقدارين الجبريين بدون استعمال الورقة والقلم؟ وضِّح إجابتك.

$$\frac{5}{x^2 - 49} + \frac{-4}{(x - 7)(x + 7)}$$

أُكتبْ

قيمة المقدار الجبري بأبسط صورة

$$\frac{z^2 + z - 6}{2z^2 + 2z - 12} \div \frac{z^2 - 16}{2z + 8}$$

Chapter Test اختبار الفصل

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1. $(x + 5)^2$
2. $(v - \sqrt{2})(v + \sqrt{2})$
3. $(2 - x)(5 - x)$
4. $(2y - 3)(y + 9)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

5. $(x + 11)(x^2 - 11x + 121)$
6. $(\frac{1}{3} - y)(\frac{1}{9} + \frac{1}{3}y + y^2)$
7. $(y - 1)^3$
8. $(z + \frac{1}{4})^3$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF) وتحقق من صحة الحل:

9. $8x^2 - 12x$
10. $7y^3 + 14y^2 - 21y$
11. $\sqrt{18}\, z^3r + \sqrt{2}\,(zr^2 - zr)$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

12. $\frac{2}{3}(y+5) + \frac{1}{3}y(y + 5)$
13. $\sqrt{5}\, z(z^2 - 1) - \sqrt{2}\, z^2(z^2 - 1)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع:

14. $6x^4 - 18x^3 + 10x - 30$
15. $56 - 8y + 14y^2 - 2y^3$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

16. $9x^3 - 6x^2 + 8 - 12x$
17. $\sqrt{11}\, z^3 - \sqrt{44}\, z^2 + 5(2 - z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

18. $16 - x^2$
19. $\frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{27}$
20. $\frac{1}{16}v - \frac{1}{2}v^4$
21. $8x^3 - \frac{1}{125}$
22. $81 - 18y + y^2$
23. $7z^2 - 36z + 5$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24. $25x^2 + 30x + 9$
25. $49 - 14y + y^2$
26. $4v^2 + 4\sqrt{5}\, v + 5$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27. $x^2 + ... + 81$
28. $36 - 12y + ...$
29. $7 - .... + 4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30. $x^2 + 7x + 10$
31. $x^2 - 5\sqrt{3}\, x + 18$
32. $2v^2 + 9v + 7$
33. $32 - 16x + 2x^2$
34. $\frac{1}{4}y^2 - 2y + 3$
35. $12 - 7\sqrt{2}\, v + 2v^2$
36. $8 + 27x^3$
37. $125y^3 - 1$
38. $\frac{1}{v^3} - \frac{8}{27}$
39. $1 + 0.125y^3$
40. $z^3 - 0.027$
41. $3 - \frac{1}{9}v^3$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية على أبسط صورة:

42. $\frac{27 - 8z^3}{4z^2 - 9} \div \frac{9 + 6z + 4z^2}{9 + 6z}$
43. $\frac{7}{x^2 - 25} - \frac{6}{x^2 + 10x + 25}$
44. $\frac{y^2 - 1}{1 - y^3} + \frac{1 + y}{1 + 2y + y^2}$
45. $\frac{z + 3}{z + 5} - \frac{z - 5}{z - 3} + \frac{1}{z^2 + 2z - 15}$

الفصلُ 3

المعادلات

Equations



سافر باسل وسعد في رحلات سياحية عن طريق مطار بغداد الدولي فكانت مجموعة باسل تقل بـ 22 شخصاً عن مجموعة سعد، فإذا كان مجموع الأشخاص المسافرين 122 شخصاً، فيمكن حساب عدد الأشخاص لكل مجموعة وذلك بحل المعادلتين الخطيتين من الدرجة الأولى $x + y = 122$ ، $x - y = 22$ إذ المتغير x يمثل عدد الأشخاص في مجموعة سعد والمتغير y يمثل عدد الأشخاص في مجموعة باسل.

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري كل منهما من حدين:

1. $(y - 5)^2$
2. $(z + 2)(z - 2)$
3. $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$
4. $(4 - y)(6 - y)$
5. $(3z - 2)(z + 8)$

جد ناتج ضرب مقدار جبري من حدين في مقدار جبري من ثلاثة حدود:

6. $(x + 3)(x^2 - 3x + 9)$
7. $(\frac{1}{2} - y)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}y + y^2)$

حلل المقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر(GCF) وتحقق من صحة الحل:

8. $5x^2 - 10x$
9. $9y^3 + 6y^2 - 3y$
10. $\sqrt{12}\,z^2 + \sqrt{3}\,z$

حلل المقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

11. $x(5 - x) - 3(5 - x)$
12. $\frac{1}{2}(y + 1) + \frac{1}{2}y(y + 1)$
13. $\sqrt{3}\,z(z - 1) - \sqrt{2}\,(z - 1)$

حلل المقدار باستعمال التجميع:

14. $6x^3 - 12x^2 + 5x - 10$
15. $9 - 18y + 7y^2 - 14y^3$
16. $\sqrt{2}\,z^4 - \sqrt{6}\,z^3 + z - \sqrt{3}$

حلل المقدار بالتجميع مع المعكوس:

17. $4x^3 - 2x^2 + 3 - 6x$
18. $\frac{3}{4}y^3 - \frac{1}{4}y^2 + 4 - 12y$
19. $\sqrt{4}\,z^3 - \sqrt{25}\,z^2 + 3(5 - 2z)$

حلل كل مقدار جبري من المقادير الآتية:

20. $y^2 - 25$
21. $\frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{8}$
22. $36 - 12x + x^2$
23. $y^2 - 2y - 15$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً وحلله:

24. $16x^2 + 40x + 25$
25. $64 - 16y + y^2$
26. $z^2 - 6z - 9$

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري **$ax^2 + bx + c$** ليصبح مربعاً كاملاً وحلله:

27. $x^2 + \ldots + 64$
28. $9 - 24y + \ldots$
29. $5 - \ldots + 4z^2$

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية الآتية:

30. $18 - 3y - y^2$
31. $z^2 - 2\sqrt{3}\,z + 3$
32. $4 - 21x + 5x^2$
33. $1 + 27z^3$
34. $y^3 - 125$
35. $y^3 - \frac{1}{8}$
36. $\frac{1}{x^3} - \frac{1}{64}$
37. $1 - 0.125z^3$

الدرسُ [3-1]

حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين

Solving the system of two Linear Equations with two variables

فكرةُ الدرس

- حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً وبالتعويض وبالحذف .

المفردات

- معادلة خطية
- نظام المعادلات الخطية
- حل النظام

تعلم

لدى أحمد معمل تعليب التمور، بلغت تكاليف العلب وهي فارغة 100000 دينار، وملء العلبة الواحدة بالتمر يكلف 500 دينار، وتباع بـ 1000 دينار. ويرغب أحمد في معرفة عدد العلب التي عليه بيعها ليحقق ربحاً.

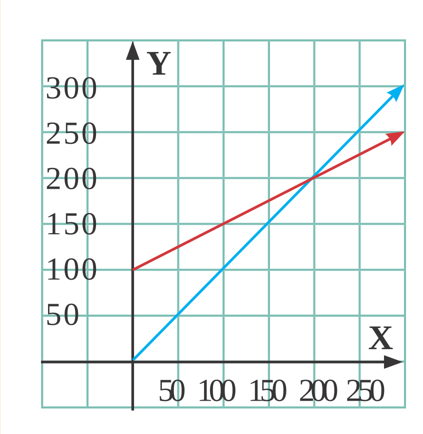


[3-1-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بيانياً

Solving the system of two linear equations by graphic method

لتكن $L_1 : a_1x + b_1y = c_1$ ، $L_2 : a_2x + b_2y = c_2$ معادلتين من الدرجة الأولى (خطيتين) بمتغيرين x , y ، لحل هذا النظام بيانياً نتبع ما يأتي: 1) تمثل كل من المستقيمين في المستوي الإحداثي. 2) لإيجاد إحداثي نقطة تقاطع المستقيمين يُرسم عمودان من النقطة على المحورين الصادي والسيني فتكون نقطة التقاطع تمثل مجموعة الحل.

مثال (1) مِن تعلّم، جد عدد العلب التي يبيعها أحمد ليحقق ربحاً.



نفرض تكاليف الإنتاج بالمتغير y ، وعدد العلب المبيعة بالمتغير x ، وعليه:

معادلة تمثل تكاليف الإنتاج الكلية ..... (1) $y = 500x + 100000$

معادلة تمثل القيمة الكلية للمبيعات (2) .... $y = 1000x$

تدريج المحور y بألوف الدنانير

نمثل المعادلتين بيانياً وتحديد نقطة تقاطع المستقيمين (200،200) التي تمثل بيع 200 علبة، وتحقق الربح يبدأ عندما يبيع أكثر من 200 علبة.

الزوج المرتب (200،200) الذي هو حل للمعادلتين يسمى حلاً للنظام.

مثال (2) جد مجموعة الحل للنظام بيانياً .

$x - y = 1$ .... (1)

$x + y = 3$ .... (2)

نمثل المعادلتين بيانياً ونحدد نقطة تقاطع المستقيمين (2,1)

لتمثيل المعادلات بيانياً نأخذ نقاط التقاطع مع المحاور

المعادلة(1)

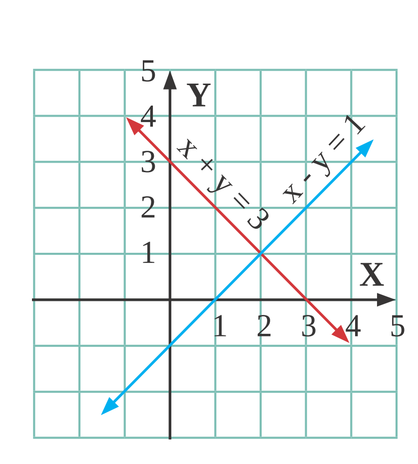
x	y = x - 1
0	-1
1	0

النقاط (0 ، -1) ، (1 ، 0)

المعادلة(2)

x	y = 3 - x
0	3
3	0

النقاط (0 ، 3) ، (3 ، 0)



مجموعة الحل للنظام هي $S = \{(2,1)\}$

للتحقق من صحة الحل نعوض عن قيمة المتغيرين x , y في كلا المعادلتين للحصول على عبارتين صائبتين.

التعويض بالمعادلة ....(1) $x - y = 1 \rightarrow 2 - 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$

التعويض بالمعادلة ....(2) $x + y = 3 \rightarrow 2 + 1 = 3 \rightarrow 3 = 3$

[3-1-2] حل نظام من معادلتين خطيتين بالتعويض
Solving the system of two linear equations by substitution method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين x , y نقوم بتحويل إحدى المعادلتين إلى معادلة بمتغير واحد فقط وذلك بإيجاد علاقة بين x , y من إحدى المعادلتين وتعويضها في المعادلة الأخرى.

مثال (3) جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض:

i) $y = 4x \; .... (1)$, $y = x + 6 \; ...... (2)$ $\Rightarrow 4x = x + 6$

نعوض عن قيمة y من المعادلة (1) في المعادلة (2) لحل المعادلة ونجد قيمة المتغير x

$\Rightarrow 4x - x = 6 \Rightarrow x = 2$

$y = x + 6 \Rightarrow y = 2 + 6 \Rightarrow y = 8$ نعوض عن قيمة x بالمعادلة (2) لإيجاد قيمة المتغير y

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2 , 8)\}$

ii) $x + 8y = 10 \; .... (1)$, $x - 4y = 2 \; ...... (2)$ $\Rightarrow x = 2 + 4y$

نجد قيمة x من المعادلة (2) ونعوضها في المعادلة (1)

$2 + 4y + 8y = 10 \Rightarrow 12y = 8 \Rightarrow y = \frac{2}{3}$ نعوض عن قيمة y بالمعادلة ...(1)

$x + 8y = 10 \Rightarrow x + 8 \times \frac{2}{3} = 10 \Rightarrow x = 10 - \frac{16}{3} \Rightarrow x = \frac{14}{3}$

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(\frac{14}{3} , \frac{2}{3})\}$

[3-1-3] حل نظام من معادلتين خطيتين بالحذف
Solving the system of two linear equations by elimination method

تتلخص هذه الطريقة لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين x , y وذلك بحذف أحد المتغيرين وبجعل معامل أحدهما متساوياً بالقيمة ومختلفاً بالإشارة في كلا المعادلتين.

مثال (4) جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف:

i) $x + 2y = 5 \; ....(1)$, $3x - y = 1 \; ...... (2)$

نضرب طرفي المعادلة ....(2) في العدد 2 ثم نجمعها مع المعادلة ...(1)

$\Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 5 \; ....(1) \\ 6x - 2y = 2 \; ....(2) \end{cases}$ بالجمع

$7x = 7 \Rightarrow x = 1$ نعوض عن قيمة x في إحدى المعادلتين (بأبسط معادلة)

$x + 2y = 5 \Rightarrow 1 + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 4 \Rightarrow y = 2$ نعوض في المعادلة ....(1)

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(1 , 2)\}$

ii) $3x + 4y = 10 \; .... (1)$, $2x + 3y = 7 \; ...... (2)$

نضرب المعادلة ....(1) في العدد 2 والمعادلة ...(2) في العدد 3 ثم نطرح المعادلتين

$\Rightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 21 \; ....(2) \\ \mp 6x \mp 8y = \mp 20 \; .....(1) \end{cases}$ بالطرح

$y = 1$ نعوض عن قيمة y في إحدى المعادلتين (قبل تغيير الإشارة)

$2x + (3 \times 1) = 7 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$ نعوض في المعادلة ....(2)

لذا مجموعة الحل للنظام هي $\{(2 , 1)\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد مجموعة الحل للنظام بيانياً:

الأسئلة (1 - 3) مشابهة للمثالين (1,2)

1. $\begin{cases} 3x - y = 6 \\ x - y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y - x = 3 \\ y + x = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = 3 - x \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

الأسئلة (4 - 6) مشابهة للمثال (3)

4. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x - 2y = 11 \\ 2x - 3y = 18 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y - 5x = 10 \\ y - 3x = 8 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

الأسئلة (7 - 9) مشابهة للمثال (4)

7. $\begin{cases} 3x - 4y = 12 \\ 5x + 2y = -6 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ 2x - 4y = 24 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3y - 2x - 7 = 0 \\ y + 3x + 5 = 0 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام وتحقق من صحة الحل:

10. $\begin{cases} \frac{2x}{3} - \frac{y}{2} = 1 \\ y - \frac{x}{3} = 4 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 0.2x - 6y = 4 \\ 0.1x - 7y = -2 \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 2\frac{3}{4} \\ \frac{1}{4}x - \frac{2}{3}y = 6\frac{1}{4} \end{cases}$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

13. $\begin{cases} x - y = -4 \\ y + x = 6 \end{cases}$

14. $\begin{cases} y = x - 4 \\ x = 2 - y \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة التعويض لكل مما يأتي:

15. $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ x - y = 8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x - y = -4 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال طريقة الحذف لكل مما يأتي:

17. $\begin{cases} 3x = 22 - 4y \\ 4y = 3x - 14 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x - 3y = 6 \\ 2x + 5y = -10 \end{cases}$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

19 **طقس:** تقل عدد الأيام (x) التي تنخفض فيها درجة الحرارة في مدينة بغداد لشهر كانون الثاني عن 10 درجات سيليزية بمقدار 9 أيام على عدد الأيام (y) التي تزداد فيها درجة الحرارة على 10 درجات سيليزية. اكتب معادلتين تمثل هذا الموقف، ثم جد حلّهما بطريقة الحذف لإيجاد عدد الأيام في كل حالة.



20 **تجارة:** باع متجر 25 ثلاجة وغسالة، بسعر مليون دينار للثلاجة ونصف مليون دينار للغسالة. إذا كان ثمن هذه الأجهزة 20 مليون دينار فكم جهازاً باع من كل نوع؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما بطريقة التعويض.



21 **حفلةُ تخرّج:** عمل سجاد وأنور حفلة بمناسبة تخرجهما من الكلية فكان عدد الأصدقاء الذين دعاهم سجاد أكثر بثلاثة من عدد الأصدقاء الذين دعاهم أنور. وكان عدد المدعوين 23 شخصاً، فكم شخصاً دعا كل منهما؟ اكتب معادلتين تمثلان المسألة ثم حلّهما لإيجاد المطلوب.

فكِّرْ

22 **تحدٍّ:** جد مجموعة الحل للنظام:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{6}x - \frac{1}{3}y = 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 3 \end{array}\right\}$$

23 **أُصحِّحُ الخطأ:** قال أحمد إن مجموعة حل للنظام:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 3y = 6 \\ 3x + 2y = 1 \end{array}\right\}$$

هي المجموعة $\{(\frac{5}{16}, \frac{5}{9})\}$

اكتشف خطأ احمد وصحّحه.

أُكتبْ

مجموعة حل للنظام:

$$\left.\begin{array}{l} 5x - 6y = 0 \\ x + 2y = 4 \end{array}\right\}$$

الدرسُ [3-2]

حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

Solving Quadratic Equations with one variable

فكرةُ الدرس

• حل المعادلات المؤلفة من حدين بتحليل الفرق بين مربعين.

المفردات

• معادلة
• درجة ثانية
• متغير واحد
• فرق بين مربعين

تعلم

تعد الزقورة من المعالم الحضارية في العراق إذ انها تقع في جنوب العراق.

رسَمَ باسل لوحةً جداريةً للزقورة مربعة الشكل مساحتها $9m^2$ على جدار إسمنتي. جد طول ضلع اللوحة .



[3-2-1] حل المعادلات بالتحليل فرق بين مربعين

Using difference between two squares to solve equations

المعادلة العامة من الدرجة الثانية بمتغير واحد $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $(a \neq 0)$ وإنّ $a,b,c \in R$.
وحلّها يعني إيجاد مجموعة قيم المتغير (x) التي تحقق المعادلة أي تجعلها عبارة صحيحة.
وسوف ندرس في هذا البند حل المعادلات المؤلفة من حدين باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين وخاصية الضرب الصفري.

مثال (1) اكتب معادلة تمثل مساحة اللوحة، ثم حلها لإيجاد طول ضلع اللوحة.

افرض طول ضلع اللوحة هو المتغير x والمعادلة التي تمثل مساحة اللوحة هي: $x^2 = 9$

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) = 0$

خاصية الضرب الصفري $\Rightarrow x + 3 = 0$ or $x - 3 = 0$

طول اللوحة الجدارية هو 3m $\Rightarrow (x = -3$ يهمل$)$ or $x = 3$

مثال (2) **حل المعادلة التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:**

التحليل باستعمال الفرق بين مربعين $16 - y^2 = 0 \Rightarrow (4 + y)(4 - y) = 0$

مجموعة الحل $4 + y = 0$ or $4 - y = 0 \Rightarrow y = -4$ or $y = 4 \Rightarrow S = \{-4, 4\}$

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير y يجب أن تحقق المعادلة

بالتعويض عن $y = -4$: $L.S = 16 - y^2 = 16 - (-4)^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$

بالتعويض عن $y = 4$: $L.S = 16 - y^2 = 16 - 4^2 = 16 - 16 = 0 = R.S$

مثال (3) **حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:**

i) $4x^2 - 25 = 0 \Rightarrow (2x + 5)(2x - 5) = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0$ or $2x - 5 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-5}{2}$ or $x = \frac{5}{2} \Rightarrow S = \{\frac{-5}{2}, \frac{5}{2}\}$

ii) $3z^2 - 12 = 0 \Rightarrow 3(z^2 - 4) = 0 \Rightarrow (z + 2)(z - 2) = 0$ بقسمة الطرفين على 3 ثم التحليل

$\Rightarrow z + 2 = 0$ or $z - 2 = 0 \Rightarrow S = \{-2, 2\}$

iii) $2y^2 - 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 3 = 0 \Rightarrow (y + \sqrt{3})(y - \sqrt{3}) \Rightarrow y = -\sqrt{3}$ or $y = \sqrt{3} \Rightarrow S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

iv) $x^2 - 5 = 0 \Rightarrow (x + \sqrt{5})(x - \sqrt{5}) = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{5}$ or $x = \sqrt{5} \Rightarrow S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

v) $(z + 1)^2 - 36 = 0 \Rightarrow (z + 1 + 6)(z + 1 - 6) = 0 \Rightarrow (z + 7)(z - 5) = 0 \Rightarrow S = \{-7, 5\}$

[3-2-2] حل المعادلات بخاصية الجذر التربيعي
Using square root property to solve the equations

تعلمت في البند السابق كيفية حل المعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة التحليل باستعمال الفرق بين مربعين، والآن سوف نجد مجموعة الحل للمعادلة من الدرجة الثانية بمتغير واحد بطريقة خاصية الجذر التربيعي:

$\sqrt{x^2} = |x| \geq 0$

$25 = 5^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(5^2)} = |5| = 5$

$25 = (-5)^2 \Rightarrow \sqrt{25} = \sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$

وبصورة عامة إذا كان a عدد حقيقي موجب فإنّ: $x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

مثال (4) **حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي وتحقق من صحة الحل:**

باستعمال قاعدة الجذر التربيعي $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$

مجموعة الحل للمعادلة $\Rightarrow S = \{3 , -3\}$

التحقق: كل قيمة في مجموعة الحل للمتغير x يجب أن تحقق المعادلة

بالتعويض عن $x = 3$ $\quad L.S = x^2 = 3^2 = 9 = R.S$

بالتعويض عن $x = -3$ $\quad L.S = x^2 = (-3)^2 = -3 \times -3 = 9 = R.S$

مثال (5) **حل المعادلة التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:**

i) $y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm\sqrt{36} \Rightarrow y = \pm 6 \Rightarrow S = \{6 , -6\}$

ii) $z^2 = \frac{9}{25} \Rightarrow z = \pm\sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow z = \pm\frac{3}{5} \Rightarrow S = \{\frac{3}{5} , -\frac{3}{5}\}$

iii) $x^2 + 81 = 0 \Rightarrow x^2 = -81$ (لايوجد عدد حقيقي مربعه سالب) لايوجد لها حل في الأعداد الحقيقية

iv) $3y^2 = 7 \Rightarrow y^2 = \frac{7}{3} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{7}{3}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} , -\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\}$

v) $4x^2 - 5 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 5 \Rightarrow x^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S = \{\frac{\sqrt{5}}{2} , -\frac{\sqrt{5}}{2}\}$

ملاحظة: إذا ربّعتَ طرفَي معادلة صحيحة فإنّ المعادلة الناتجة تبقى صحيحة $(y = x \Rightarrow y^2 = x^2)$، مثلاً:

$\sqrt{x} = 5 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 5^2 \Rightarrow x = 25$

والعكس ليس صحيح أي أنّ: $x^2 = y^2 \nRightarrow x = y$

مثال (6) **حل المعادلات التالية:**

بتربيع طرفي المعادلة

i) $3\sqrt{x} = 18 \Rightarrow \sqrt{x} = 6 \Rightarrow (\sqrt{x})^2 = 6^2 \Rightarrow x = 36 \Rightarrow S = \{36\}$

ii) $\sqrt{y+8} = 3 \Rightarrow (\sqrt{y+8})^2 = 3^2 \Rightarrow y + 8 = 9 \Rightarrow y = 9 - 8 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow S = \{1\}$

iii) $\sqrt{5z} = 7 \Rightarrow (\sqrt{5z})^2 = 7^2 \Rightarrow 5z = 49 \Rightarrow z = \frac{49}{5} \Rightarrow S = \{\frac{49}{5}\}$

iv) $\sqrt{\frac{x}{13}} = 1 \Rightarrow (\sqrt{\frac{x}{13}})^2 = 1^2 \Rightarrow \frac{x}{13} = 1 \Rightarrow x = 13 \Rightarrow S = \{13\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

الأسئلة (1 - 3) مشابهة للمثال (2)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين وتحقق من صحة الحل:

1. $x^2 - 16 = 0$
2. $81 - y^2 = 0$
3. $2z^2 - 8 = 0$

الأسئلة (4 - 9) مشابهة للمثال (3)

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

4. $4x^2 - 9 = 0$
5. $5y^2 - 20 = 0$
6. $(y + 2)^2 - 49 = 0$
7. $(3 - z)^2 - 1 = 0$
8. $x^2 - 3 = 0$
9. $y^2 - \frac{1}{9} = 0$

الأسئلة (10 - 15) مشابهة للمثال (4)

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10. $x^2 = 64$
11. $z^2 = 7$
12. $2y^2 = \frac{49}{8}$
13. $6z^2 - 5 = 0$
14. $4(x^2 - 12) = 33$
15. $z^2 + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$

الأسئلة (16 - 18) مشابهة للمثال (5)

حل المعادلات التالية:

16. $3\sqrt{x} = 15$
17. $\sqrt{y - 5} = 2$
18. $\sqrt{2z} = 6$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

19. $x^2 = 49$
20. $5y^2 - 10 = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال الفرق بين مربعين:

21. $9x^2 - 36 = 0$
22. $9(x^2 - 1) - 7 = 0$
23. $y^2 - \frac{1}{36} = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

24. $x^2 = 121$
25. $50 - 2y^2 = 0$
26. $x^2 = \frac{1}{64}$
27. $7(x^2 - 2) = 50$

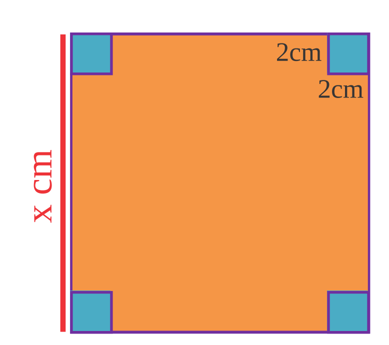
حل المعادلات التالية:

28. $6\sqrt{x} = 30$
29. $\sqrt{4z} = 8$

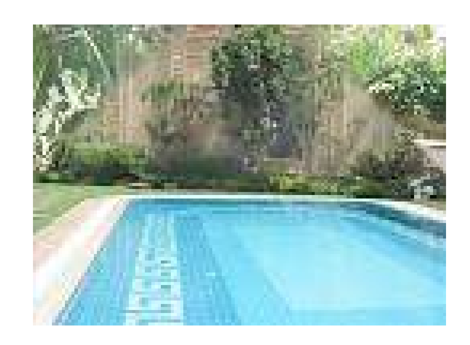
تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



30 **موكيت سجاد:** قطعة موكيت سجاد مستطيلة طولها 12m وعرضها 3m، قُطِّعَت إلى أجزاء لتغطية أرضية غرفة مربعة الشكل. أُكتب معادلة تمثّل المسألة ثم جد طول ضلع الغرفة.



31 **هندسة:** قطعة كارتون مربعة الشكل طول ضلعها x cm، قطعت الى أربعة مربعات متساوية من زواياها طول ضلع كل مربع 2cm، وثُنِيتْ لتكون صندوقاً دون غطاء على شكل متوازي سطوح مستطيلة حجمه $32\ cm^3$. أُكتب معادلة تمثّل المسألة ثم جد طول ضلع قطعة الكارتون الأصلية.



32 **نافورة:** صُمِّمَ حوض سباحة مربع الشكل طول ضلعه 3m في منتصف حديقة مربعة الشكل، فكانت المساحة المتبقية من الحديقة والمحيطة بالحوض $40m^2$، أُكتب معادلة تمثّل المسألة ثم جد طول ضلع الحديقة.

فكِّرْ

33 **تحدٍّ:** حل المعادلات التالية:

i) $9(x^2 + 1) = 34$ ii) $4x^2 - 3 = 0$

34 هل المجموعة المعطاة تمثل مجموعة الحل للمعادلة أم لا؟

i) $(2y + 1)^2 = 16$, $\{\frac{3}{\sqrt{2}}, -\frac{3}{\sqrt{2}}\}$ ii) $3x^2 - 7 = 0$, $\{\frac{7}{\sqrt{3}}, -\frac{7}{\sqrt{3}}\}$

35 **أُصحِّحُ الخطأ:** قال صلاح إنّ المجموعة $\{\frac{4}{\sqrt{5}}, -\frac{4}{\sqrt{5}}\}$ تمثل مجموعة الحل للمعادلة $5x^2 = 4$
اكتشف خطأ صلاح وصحِّحهُ.

36 **حسٌّ عدديٌّ:** عدد صحيح موجب من رقم واحد لو أُنقِصَ من مربعه واحد لكان الناتج عدد من مضاعفات العشرة. ما العدد؟

أُكتبْ

مجموعة الحل للمعادلة:

$(8 - 3y)^2 - 1 = 0$

الدرسُ]3-3[

حل المعادلات التربيعية بالتجربة
Solve the Quadratic Equations by factoring.

فكرةُ الدرس

• حل المعادلات من الدرجة الثانية المؤلفة من ثلاثة حدود بالتحليل بالتجربة.

المفردات

• المعادلة التربيعية
• التجربة

تعلم

إذا كان طول ملعب كرة السلة يزيد بمقدار 2m على ضعف عرضه، ومساحته $480m^2$.

فما بُعدَي الملعب؟



]3-3-1[حل المعادلة $x^2 + bx + c = 0$
Solving the equation $x^2 + bx + c = 0$

تعرفت سابقاً الى كيفية إيجاد تحليل مقدار جبري مؤلف من ثلاثة حدود بواسطة التجربة، والآن سوف تستعمل التحليل في حل المعادلات من الدرجة الثانية والمؤلفة من ثلاثة حدود $x^2 + bx + c = 0$ إذ b,c أعداد حقيقية. (تحليل المقدار إلى قوسين بإشارتين مختلفتين أو بإشارتين متشابهتين بحسب إشارة الحد المطلق والحد الأوسط).

مثال (1) إيجاد بُعدَي ملعب كرة السلة.

نفرض أن عرض الملعب بالمتغير x، ولذا فإنّ طول الملعب يكون $2x + 2$

مساحة الملعب = الطول × العرض

$$x(2x + 2) = 480 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 480 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 240 = 0$$

$$\Rightarrow (x + 16)(x - 15) = 0$$

الحد الأوسط $-15x + 16x = x$

$$\Rightarrow x + 16 = 0 \Rightarrow x = -16$$

يهمل لأنه لايوجد طول بالسالب

$$\text{or } x - 15 = 0 \Rightarrow x = 15$$

لذا عرض الملعب $15m$ وطوله $2 \times 15 + 2 = 32m$

مثال (2) **حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:**

i) $x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = 4 \Rightarrow S = \{3, 4\}$

ii) $y^2 + 8y + 15 = 0 \Rightarrow (y + 3)(y + 5) = 0 \Rightarrow y = -3 \text{ or } y = -5 \Rightarrow S = \{-3, -5\}$

iii) $z^2 + z - 30 = 0 \Rightarrow (z + 6)(z - 5) = 0 \Rightarrow z = -6 \text{ or } z = 5 \Rightarrow S = \{-6, 5\}$

iv) $x^2 - 2x - 63 = 0 \Rightarrow (x - 9)(x + 7) = 0 \Rightarrow x = 9 \text{ or } x = -7 \Rightarrow S = \{9, -7\}$

v) ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 12؟

نفرض العدد x ، فيكون مربع العدد x^2، والجملة العددية التي تمثل المسألة هي:

$$x^2 - x = 12 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 3) = 0 \Rightarrow x = 4 \text{ or } x = -3$$

لذا العدد إما 4 أو -3

[3-3-2] حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ وان $a \neq 0$

Solving the equation $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

تعلمت سابقاً حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة التجربة وأن المتغير x^2 من دون معامل، أما الآن فستتعلم كيفية حل المعادلة نفسها ولكن مع وجود معامل للمتغير x^2.

مثال (3) مسبح يقل طوله عن ثلاثة أمثال عرضه بمقدار 1m.
فإذا كانت مساحة المسبح $140\ m^2$، جد أبعاده.



نفرض عرض المسبح بالمتغير x

لذا طول المسبح 3x - 1

المعادلة التي تمثل المسألة هي $x(3x-1) = 140$، نحل المعادلة:

$x(3x-1) = 140 \Rightarrow 3x^2 - x - 140 = 0$ الحد الأوسط $-21x + 20x = -x$

$\Rightarrow (3x + 20)(x - 7) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 20 = 0 \Rightarrow x = -\frac{20}{3} \\ \text{or } x - 7 = 0 \Rightarrow x = 7 \end{cases}$ يهمل لأنه لايوجد طول بالسالب

لذا عرض المسبح 7m وطوله 20m

مثال (4) حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i) $4y^2 - 14y + 6 = 0 \Rightarrow (4y - 2)(y - 3) = 0$ الحد الأوسط $-12y - 2y = -14y$

$\Rightarrow \begin{cases} 4y - 2 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \\ \text{or } y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3 \end{cases} \Rightarrow S = \{\frac{1}{2}, 3\}$

ii) $3x^2 + 18x - 21 = 0 \Rightarrow (3x - 3)(x + 7) = 0$ الحد الأوسط $21x - 3x = 18x$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \\ \text{or } x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7 \end{cases} \Rightarrow S = \{1, -7\}$

iii) $20 + 13z + 2z^2 = 0 \Rightarrow (4 + z)(5 + 2z) = 0$ الحد الأوسط $8z + 5z = 13z$

$\Rightarrow \begin{cases} 4 + z = 0 \Rightarrow z = -4 \\ \text{0r } 5 + 2z = 0 \Rightarrow z = -\frac{5}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \{-4, -\frac{5}{2}\}$

iv) $9x^2 - 69x - 24 = 0 \Rightarrow 3(3x^2 - 23x - 8) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 23x - 8 = 0$

$\Rightarrow (3x + 1)(x - 8) = 0$ الحد الأوسط $-24x - x = -23x$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3} \\ \text{or } x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8 \end{cases} \Rightarrow S = \{-\frac{1}{3}, 8\}$

تأكَّدْ من فهمِكَ

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثال (2)

1. $x^2 - 9x + 18 = 0$
2. $x^2 - 4x - 32 = 0$
3. $y^2 + 48y - 49 = 0$
4. $y^2 + 9y - 36 = 0$
5. $x^2 - 3x + 2 = 0$
6. $y^2 - 8y - 33 = 0$

الأسئلة (7 - 9) مشابهة للمثال (1)

7. ما العدد الذي مربعه يزيد على ضعفه بمقدار 35 ؟
8. ما العدد الذي لو أُضيف 4 أمثاله إلى مربعه لكان الناتج 45 ؟
9. سجادة طولها يزيد على عرضها بمقدار $2m$ ومساحتها $48m^2$. ما أبعاد السجادة؟

حل المعادلات الآتية:

الأسئلة (10 - 14) مشابهة للمثال (4)

10. $15x^2 - 11x - 14 = 0$
11. $6 + 7x - 5x^2 = 0$
12. $42 + 64y + 24y^2 = 0$
13. $36 - 75x + 6x^2 = 0$
14. $70 - 33y + 2y^2 = 0$

السؤال (15) مشابه للمثال (3)

15. أرض مستطيلة الشكل يزيد طولها بمقدار $4m$ على عرضها. ما بُعدا الأرض إذا كانت مساحتها $60m^2$ ؟

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

16. $x^2 - 15x + 56 = 0$
17. $y^2 + 16y + 63 = 0$
18. $x^2 + 15x - 16 = 0$
19. $y^2 - y - 42 = 0$
20. قطعة معدن مستطيلة الشكل ينقص عرضها بمقدار $2m$ عن طولها. ما بُعدا القطعة المعدنية إذا كانت مساحتها $24m^2$ ؟
21. صالة طعام ينقص طولها عن مِثلَي عرضها بمقدار $3m$ ومساحتها $54m^2$. ما أبعاد الصالة؟

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

22. $x^2 - 4x + 3 = 0$
23. $y^2 - 9y - 36 = 0$
24. $4 - 26x + 12x^2 = 0$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



25 **رياضة:** إذا كان طول صورة إعلانية لملعب كرة القدم يزيد بمقدار 4m على ضعف عرضها، فما بعدا الصورة إذا كانت مساحتها $160\ m^2$ ؟



26 **حقل نعام:** إذا كان طول حقل لتربية طيور النعام يقل بمقدار 4m عن ضعف عرضه، فإذا كانت مساحة الحقل $96m^2$ ، فهل يكفي سياج طوله 44m لتحويط الحقل؟



27 **إطار صورة:** اشترى سامر إطار لصورة، طوله ضعف عرضه. يحتاج سامر إلى تصغير الإطار بمقدار 2cm من طوله وعرضه ليصبح مناسباً للصورة، فما أبعاد الإطار الذي اشتراه سامر، إذا كانت مساحة الصورة $40cm^2$ ؟

فَكِّرْ

28 **تحدٍّ:** حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

i) $(x - 3)(x + 2) = 14$

ii) $3y^2 - 11y + 10 = 80$

29 **وضِّح:** هل أن المجموعة المعطاة تمثل مجموعة حل للمعادلة أم لا؟

i) $4x^2 + 2x = 30\ ,\ \{\frac{-2}{5}, 3\}$

ii) $42 - 33y + 6y^2 = 0\ ,\ \{2, \frac{7}{2}\}$

30 **أُصحِّحُ الخطأ:** قالت رنا إن مجموعة الحل للمعادلة $2x^2 - 34x + 60 = 0$ هي $\{3,15\}$.
أُحدِّد خطأ رنا وأُصحِّحه.

أُكتبْ

معادلة تمثل المسألة التالية ثم جد حلها:
ما العدد الذي ينقص ضعفه عن مربعه بمقدار 35 ؟

الدرسُ [3-4]

حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل
Solving the Quadratic Equations by the Perfect Square

فكرةُ الدرس
- حل المعادلات التربيعية بطريقة إكمال المربع.

المفردات
- الحد الأول
- الحد الأخير
- مربع كامل
- إكمال المربع

تعلم

الجاكوَر (Panthera onca) هو أحد السنَّوريات الكبرى المنتمية لجنس النمور، جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 20x + 100 = 0$ والتي تمثّل طول ضلع المنطقة المربعة المحددة له بالمتر المربع في حديقة الحيوانات.



[3-4-1] حل المعادلات التربيعية بالمربع الكامل
Solving the quadratic equations by the perfect square

تعرفت سابقاً الى كيفية تحليل مقدار جبري على هيئة مربع كامل، والآن سوف نستعمل هذا التحليل في حل معادلات بالتحليل بالمربع الكامل لإيجاد مجموعة الحل للمعادلة.

مثال (1) ما المقدار الذي يمثله طول ضلع المنطقة المربعة؟

لتحليل الطرف الأيسر من المعادلة نتأكد من أن المقدار يمثل مربعاً كاملاً $x^2 - 20x + 100 = 0$

مربع كامل لأنّ: الحد الأوسط = 2×(جذر الحد الأول×جذر الحد الأخير) $2(x \times 10)$

تحليل المقدار $x^2 - 20x + 100 = 0 \Rightarrow (x-10)^2 = 0 \Rightarrow (x-10)(x-10) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \\ \text{or } x - 10 = 0 \Rightarrow x = 10 \end{cases}$$

لذا طول ضلع المنطقة المربعة المخصصة للنمر هو 10m

مثال (2) حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

i) $4x^2 + 20x + 25 = 0$ الحد الأوسط $2 \times (2x \times 5) = 20x$

نأخذ أحد العوامل المتكررة $\Rightarrow (2x+5)^2 = 0 \Rightarrow 2x + 5 = 0 \Rightarrow 2x = -5 \Rightarrow x = -\frac{5}{2}$

ii) $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0$ الحد الأوسط $2 \times (y \times \frac{1}{2}) = y$

نأخذ أحد العوامل المتكررة $\Rightarrow (y - \frac{1}{2})^2 = 0 \Rightarrow y - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$

iii) $3 - 6\sqrt{3}z + 9z^2 = 0$ الحد الأوسط $2 \times (\sqrt{3} \times 3z) = 3\sqrt{3}z$

نأخذ أحد العوامل المتكررة $\Rightarrow (\sqrt{3} - 3z)^2 = 0 \Rightarrow \sqrt{3} - 3z = 0 \Rightarrow z = \frac{1}{\sqrt{3}}$

[3-4-2] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع
Solving quadratic equations by completing the square

الآن سوف تتعرف إلى كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطريقة إكمال المربع:

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة $ax^2 + bx = -c$ ، حيث $a \neq 0$.
2) إذا كان $a \neq 1$ فتقسم المعادلة على a .
3) نضيف إلى طرفي المعادلة المقدار (مربع نصف معامل x).
4) نحلل الطرف الأيسر الذي أصبح مربعاً كاملاً بعد الخطوة 3 ، ونبسّط الطرف الأيمن.
5) نأخذ الجذر التربيعي للطرفين ونجد قيم x .

مثال (3) حل المعادلات التالية بطريقة إكمال المربع:

i) $x^2 - 4x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x = 12$ نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 12 + 4$ إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -4)^2 = 4$ إلى طرفي المعادلة

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 16 \Rightarrow (x-2)^2 = 16$ نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$\Rightarrow x - 2 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 4 \Rightarrow x = 6 \\ \text{or } x - 2 = -4 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow S = \{6, -2\} \end{cases}$$

ii) $2y^2 - 3 = 3y \Rightarrow 2y^2 - 3y = 3$ نكتب المعادلة كما في الخطوة الأولى

$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y = \frac{3}{2}$ بقسمة طرفَي المعادلة على 2

$\Rightarrow y^2 - \frac{3}{2}y + \frac{9}{16} = \frac{3}{2} + \frac{9}{16}$ إضافة المقدار $(\frac{1}{2} \times -\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{16}$ إلى طرفي المعادلة

$\Rightarrow (y - \frac{3}{4})^2 = \frac{33}{16}$ بتحليل الطرف الأيسر ونبسّط الطرف الأيمن للمعادلة

$\Rightarrow y - \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$ نأخذ الجذر التربيعي لطرفي المعادلة

$$\Rightarrow \begin{cases} y - \frac{3}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} \\ \text{or } y - \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \Rightarrow y = \frac{3 - \sqrt{33}}{4} \Rightarrow S = \left\{\frac{3 - \sqrt{33}}{4}, \frac{3 + \sqrt{33}}{4}\right\} \end{cases}$$

مثال (4) مستطيل يزيد طوله على عرضه بمقدار 2cm ، قدّر طول المستطيل وعرضه بالتقريب لأقرب عدد صحيح إذا كانت مساحته $36cm^2$.

نفرض عرض المستطيل بالمتغير x فيكون طول المستطيل هو $x + 2$

والمعادلة التي تمثل المسألة: $x(x + 2) = 36$

نحل المعادلة بطريقة إكمال المربع

$\Rightarrow x^2 + 2x = 36$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 36 + 1$ نضيف $(\frac{1}{2} \times 2)^2 = 1$ إلى طرفي المعادلة

$\Rightarrow (x+1)^2 = 37 \Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{37} \Rightarrow x + 1 \approx \pm 6$ $\sqrt{37} \approx \sqrt{36}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 1 \approx 6 \Rightarrow x \approx 5 \\ \text{or } x + 1 \approx -6 \Rightarrow x \approx -7 \text{ يهمل} \end{cases}$$

لذا عرض المستطيل التقريبي 5cm وطوله 7cm

تأكَّدْ من فهمِكَ

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثال (2)

1. $x^2 + 12x + 36 = 0$
2. $y^2 - 10y + 25 = 0$
3. $4x^2 - 4x + 1 = 0$
4. $y^2 + 2\sqrt{7}\,y + 7 = 0$
5. $x^2 + 16x = -64$
6. $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

الأسئلة (7 - 12) مشابهة للمثال (3)

7. $x^2 - 10x - 24 = 0$
8. $y^2 - 3 = 2y$
9. $4x^2 - 3x - 16 = 0$
10. $3y^2 + 2y = 1$
11. $x^2 - \frac{6}{5}x = \frac{1}{5}$
12. $5y^2 + 15y - 30 = 0$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

13. $x^2 + 24x + 144 = 0$
14. $y^2 + 4\sqrt{2}\,y + 8 = 0$
15. $3y^2 + 36 - 12\sqrt{3}\,y = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

16. $y^2 + 2\sqrt{3}\,y = 3$
17. $x^2 - 2x = 0$
18. $x^2 - \frac{2}{3}x = 4$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:

19. $x^2 - 6x = 15$
20. $y(2y + 28) = 28$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



21 **مدينة بابل:** مدينة بابل باللّاتينية Babylon هي مدينة عراقية كانت تقع على نهر الفرات، وكانت عاصمة البابليين أيام حكم حمورابي سنة (1792 - 1750) قبل الميلاد. جد قيمة x من المعادلة $x^2 - 28x + 196 = 0$ والتي تمثل طول ضلع إحدى القاعات المربعة الشكل.



22 **دب الباندا:** المساحة المخصصة لدب الباندا في حديقة الحيوانات مستطيلة الشكل 126 متراً مربعاً، وعرضها يقل بمقدار 8 متر عن طولها. جد أبعاد المنطقة المخصصة للدب بالتقريب لأقرب عدد صحيح.



23 **حيتان:** تجنح بعض المجموعات من الحيتان إلى الشاطئ ولايوجد تفسير علمي لهذه الظاهرة، ويحاول حماة البيئة إرجاعها إلى البحر. حل المعادلة $x^2 + 20x = 525$ بطريقة إكمال المربع لإيجاد قيمة x التي تمثل عدد الحيتان التي جنحت إلى أحد شواطئ استراليا.

فَكِّرْ

24 **تحدٍّ:** **حل المعادلات التالية في R بإكمال المربع، وجد الناتج بالتقريب لأقرب عدد صحيح:**

ii) $6y^2 - 48y = 6$ i) $4x(x - 6) = 27$

25 **أُصحِّحُ الخطأ:** حلّت سوسن المعادلة $4x^2 - 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ بطريقة إكمال المربع وكتبَتْ مجموعةَ الحل للمعادلة بالشكل الآتي: $S = \{\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$. اكتشف خطأ سوسن وصحّحه.

26 **حسٌّ عدديٌّ:** هل انّ مجموعة حل للمعادلة $y^2 - 4y + 4 = 0$ تحتوي على قيمتين متساويتين بالمقدار أحدهما سالبة والأخرى موجبة؟ وضّح إجابتك.

أُكتبْ

مجموعة الحل للمعادلة: $\frac{1}{81} - \frac{2}{9}z + z^2 = 0$

الدرسُ]3-5[

حل المعادلات بالقانون العام

Using General Law to solve the Equations

فكرةُ الدرس

- حل المعادلات من الدرجة الثانية بالقانون العام.

المفردات

- معامل
- الحد المطلق
- القانون العام

تعلم

أريدَ رصفُ ممرٍّ على جانبَي حديقة منزل بالسيراميك طول الحديقة 7m وعرضها 5m، ومساحة الرصف $45m^2$. جد عرض الممر المطلوب رصفه بالسيراميك.

حديقة المنزل

7

x

5

x

]3-5-1[حل المعادلات باستعمال القانون $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ وأن $a \neq 0$

Solving the equations by using the law $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ and $a \neq 0$

تعلمت في الدروس السابقة كيفية حل معادلة من الدرجة الثانية بطرائق عدة، ولكن هنالك معادلات لايمكن حلها بالطرائق السابقة، فسوف نحلها بطريقة القانون العام (الدستور) وذلك لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية وكما يأتي:

1) نضع المعادلة التربيعية بالصورة العامة (القياسية) $ax^2 + bx + c = 0$.

2) نكتب قيم المعاملات: a معامل x^2 ، b معامل x مع إشارته، c الحد المطلق مع إشارته.

3) نعوض بالقانون العام لإيجاد قيمتي المتغير.

مثال (1(من فقرة تعلّم، ما عرض الممر المطلوب رصفه على جانبَي الحديقة؟

على فرض أن عرض الممر هو x ، فإنّ مساحة الجزء الأيمن من الممر = 7x ،

ومساحة الجزء الممر الأمامي = 5x ، ومساحة زاوية الممر = x^2 ومجموع مساحتَي الرصف $45m^2$.

المعادلة التي تمثل المسألة $x^2 + 7x + 5x = 45 \Rightarrow x^2 + 12x = 45$

وضع المعادلة بالصورة العامة $x^2 + 12x - 45 = 0$

تعين المعاملات والتعويض بالقانون العام $a = 1 \ , \ b = 12 \ , \ c = -45$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 4\times1\times(-45)}}{2\times1} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 + 180}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{324}}{2} \Rightarrow x = \frac{-12 \pm 18}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-12 + 18}{2} \Rightarrow x = 3 \\ \text{or } x = \frac{-12 - 18}{2} \Rightarrow x = -15 \end{cases}$$

عرض الممر 3m

يهمل غير ممكن $x = -15$

مثال (2(جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

$x^2 - 3x - 5 = 0 \ , \ a = 1 \ , \ b = -3 \ , \ c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 20}}{2} \Rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{29}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \\ \text{or } x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{\frac{3 + \sqrt{29}}{2}, \frac{3 - \sqrt{29}}{2}\right\}$$

[3-5-2] المقدار المميز ($\Delta = b^2 - 4ac$)
The discriminate ($\Delta = b^2 - 4ac$)

تعلمت في الجزء الأول من هذا الدرس كيفية حل المعادلة بالقانون العام لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة. والآن سوف نتطرق إلى مميز المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ وهو $\Delta = b^2 - 4ac$، وإنّ نوع جذري المعادلة يتعين كما يأتي:

	$\Delta = b^2 - 4ac$	نوع الجذرين
1)	موجب ومربع كامل ....(المعاملات أعداد نسبية).........	جذران حقيقيان نسبيان
2)	موجب وليس مربعاً كاملاً	جذران حقيقيان غير نسبيين
3)	صفر	جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$
4)	سالب	جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

مثال (3) حدِّد جذري المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

i) $2x^2 + 3x - 2 = 0$, $a = 2$, $b = 3$, $c = -2$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 9 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ المقدار المميز مربع كامل أي للمعادلة جذران نسبيان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4} \Rightarrow x = \frac{-3 + 5}{4} = \frac{1}{2} \text{ or } x = \frac{-3 - 5}{4} = -2$$

ii) $y^2 - 4y - 9 = 0$, $a = 1$, $b = -4$, $c = -9$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 16 - 4 \times 1 \times (-9) = 52$ المقدار المميز ليس مربعاً كاملاً لذا للمعادلة جذران غير نسبيين

$$y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 36}}{2} \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{2} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{13} \text{ or } x = 2 - \sqrt{13}$$

iii) $z^2 + 8z = -16 \Rightarrow z^2 + 8z + 16 = 0$, $a = 1$, $b = 8$, $c = 16$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 64 - 4 \times 1 \times 16 = 0$ قيمة المقدار المميز صفر أي المعادلة لها جذران حقيقيان متساويان

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 64}}{2} = -4$$

ممكن تطبيق القانون $(\frac{-b}{2a})$ مباشرة

iv) $x^2 - 2x + 10 = 0$, $a = 1$, $b = -2$, $c = 10$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = 4 - 4 \times 1 \times 10 = -36$ قيمة المقدار المميز سالب ولذلك المعادلة ليس لها حل في R

مثال (4) ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k+1)x + 4 = 0$ متساويين؟ تحقّق من الإجابة.

يكون جذرا المعادلة متساويين عندما قيمة المقدار المميز Δ يساوي صفر.

نحدد قيم المعاملات $a = 1$, $b = -(k+1)$, $c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 4 \times 1 \times 4 \Rightarrow \Delta = (k+1)^2 - 16$

نعوض عن قيمة المميز بصفر وذلك لتساوي جذري المعادلة $\Delta = 0 \Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0$

بجذر طرفي المعادلة $\Rightarrow (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow (k+1)^2 = 16$

$$\Rightarrow k + 1 = \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} k + 1 = +4 \Rightarrow k = 3 \\ \text{or } k + 1 = -4 \Rightarrow k = -5 \end{cases}$$

التحقق: نعوض بقيمة $k = 3$ بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2$

نعوض بقيمة $k = -5$ بالمعادلة الأصلية ونجد جذور المعادلة:

$x^2 - (k+1)x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow (x + 2)^2 = 0 \Rightarrow x = -2$

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1. $x^2 - 4x - 5 = 0$
2. $y^2 + 5y - 1 = 0$
3. $3x^2 - 9x = -2$
4. $4y^2 + 8y = 6$
5. $4x^2 - 12x + 9 = 0$
6. $2y^2 - 3 = -5y$

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثالين (1،2)

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

7. $2x^2 + 3x = 5$
8. $3x^2 - 7x + 6 = 0$
9. $y^2 - 2y + 1 = 0$
10. $y^2 + 12 = -9y$

الأسئلة (7 - 10) مشابهة للمثال (3)

11. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 2)x + 36 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
12. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $4y^2 + 25 = (k - 5)y$ متساويين ؟ تحقق من الإجابة.
13. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $z^2 + 16 = (k + 4)z$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
14. بيِّن أنّ المعادلة $z^2 - 6z + 28 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

الأسئلة (11 - 14) مشابهة للمثالين (3,4)

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

15. $x^2 - 7x - 14 = 0$
16. $y^2 + 3y - 9 = 0$
17. $2x^2 - 8(3x + 2) = 0$
18. $2y^2 - 2 = -10y$

حدّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

19. $y^2 - 2y - 10 = 0$
20. $y^2 - 14y + 49 = 0$
21. ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 49 = 0$ متساويين؟ تحقق من الإجابة.
22. بيِّن أنّ المعادلة $2z^2 - 3z + 10 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية.

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



23 **ألعابٌ نارية:** في إحدى المناسبات أُطلقت مجموعة من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 140m. احسب الزمن (t ثانية) الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع من المعادلة الآتية: $5t^2 + 60t = 140$



24 **تجارةٌ:** يحسب سامر سعرَ الكلفة للبدلة الرجالية الواحدة ثم يضيف عليها مبلغَ للربح ويبيعها للزبائن بمبلغ 120 ألف دينار، إذا كانت p في المعادلة $p^2 - 30p + 225 = 0$ تمثّل مبلغَ ربح سامر في البدلة الواحدة بأُلوف الدنانير، فما سعرُ كلفة البدلة الواحدة؟

فَكِّرْ

25 **تحدٍّ:** حدِّد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

ii) $3y^2 - 6y - 42 = 0$

i) $x^2 + 8x = 10$

26 **أُصحّحُ الخطأ:** قال سعد إن المعادلة $2x^2 - 3x - 9 = 0$ ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية. اكتشف خطأَ سعد وصحِّحه.

27 **حسٌّ عدديٌّ:** استعملت مروةُ المقدارَ المميّزَ لكتابة جذرَي المعادلة $z^2 - 8z + 16 = 0$ دون تحليلها. فسِّر كيف استطاعت مروة كتابة جذرَي المعادلة.

أُكتبْ

نوع جذري المعادلة $x^2 + 100 = 20x$ باستعمال المقدار المميز من دون حلها.

الدرسُ [3-6]

حل المعادلات الكسرية
Solving the Fractional Equations

فكرةُ الدرس
- حل المعادلات الكسرية من الدرجة الثانية.

المفردات
- بسط الكسر
- مقام الكسر
- معادلة كسرية



إذا كان ثمن شراء التحفية الواحدة بدلالة المتغير x هو $2x + 3$ ألف دينار وثمن شراء ست تحفيات أيضاً بدلالة x هو $x^2 + 3x - 1$ ألف دينار، فإذا كانت نسبة ثمن تحفية واحدة إلى ثمن ثلاث تحفيات $\frac{1}{3}$، فما ثمن شراء تحفية واحدة؟



تعرفت سابقاً إلى كيفية تبسيط المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وذلك بقسمة كل من البسط والمقام على عامل مشترك، والآن سوف نستعمل تحليل المقادير الجبرية لحل المعادلات الكسرية التي في مقامها متغير وذلك بالتخلص من الكسور ثم حلها بإحدى الطرائق التي تعلمتها سابقاً.

مثال (1) اكتب ثمن شراء التحفية الواحدة.

$$\frac{\text{ثمن تحفية واحدة}}{\text{ثمن ثلاث تحفيات}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{2x+3}{(x^2+3x-1)} = \frac{1}{3}$$ تبسيط الكسر بضرب الطرفين في الوسطين

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 1 = 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$ تبسيط المعادلة لتحليلها

$$\Rightarrow (x-5)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 5 = 0 \Rightarrow x = 5 \\ \text{or } x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$$ يهمل لايوجد سعر بالسالب

إذن ثمن شراء تحفية واحدة هو $(2x + 3 = 13)$ ثلاثة عشر ألف دينار

مثال (2) **جد مجموعة الحل للمعادلة التالية، ثم تحقق من صحة الحل:**

$$5x + \frac{x-2}{3x} = \frac{2}{3}$$ نضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر (LCM) للتخلص من الكسور

$$3x(5x) + 3x\left(\frac{x-2}{3x}\right) = 3x\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow 15x^2 + x - 2 = 2x \Rightarrow 15x^2 - x - 2 = 0$$ تبسيط المعادلة

$$\Rightarrow (3x+1)(5x-2) = 0$$ تحليل بالتجربة

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{3} \\ \text{or } 5x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow S = \left\{\frac{-1}{3}, \frac{2}{5}\right\}$$ مجموعة الحل

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية عندما $: x = \frac{-1}{3}$

$$L.S = 5\left(\frac{-1}{3}\right) + \frac{\frac{-1}{3} - 2}{3\times\frac{-1}{3}} = \frac{-5}{3} + \frac{-1}{3} + 2 = \frac{-5}{3} + \frac{1}{3} + 2 = \frac{-5+1+6}{3} = \frac{2}{3} = R.S$$

كذلك من السهل التحقق عندما $x = \frac{2}{5}$ (تُترك للطالب)

تعلمت سابقاً كيفية تبسيط جمع المقادير الجبرية النسبية (الكسرية) وطرحها وذلك بتحليل كل من بسط ومقام الكسر إلى أبسط صورة ثم إجراء عملية جمع وطرح المقادير الكسرية باستعمال المضاعف المشترك الأصغر وتبسيط المقدار الى أبسط صورة (simplest form)، والآن سوف تستعمل ذلك في حل المعادلات الكسرية لإيجاد مجموعة حلول المعادلة الكسرية .

مثال (3) جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{x^2-9}$$

نحلل المقامات إلى أبسط صورة ممكنة

$$\Rightarrow \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{18}{(x-3)(x+3)}$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM (x-3) (x+3)

$$\Rightarrow x(x+3) + 4x(x-3) = 18$$

تبسيط المعادلة وحلها لإيجاد قيم المتغير

$$\Rightarrow x^2 + 3x + 4x^2 - 12x - 18 = 0 \Rightarrow 5x^2 - 9x - 18 = 0$$

$$\Rightarrow (5x+6)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -\frac{6}{5} \text{ or } x = 3$$

ملاحظة: يجب استبعاد القيم التي تجعل مقام أيّ حد كسري من حدود المعادلة الأصلية صفراً لأنه يؤدي إلى القسمة على صفر وهذا غير جائز.

ولذا نستبعد $x = 3$ من الحل لأن $(\frac{x}{x-3} = \frac{3}{0})$، ويكون الحل فقط هو $x = -\frac{6}{5}$

التحقق: نعوض بالمعادلة الأصلية $x = -\frac{6}{5}$ ونرى إن كان طرفا المعادلة متساويين أم لا؟

$$L.S = \frac{x}{x-3} + \frac{4x}{x+3} = \frac{-\frac{6}{5}}{-\frac{6}{5}-3} + \frac{4\times -\frac{6}{5}}{-\frac{6}{5}+3} = \frac{6}{21} - \frac{8}{3} = -\frac{50}{21}$$

$$R.S = \frac{18}{x^2-9} = \frac{18}{(-\frac{6}{5})^2-9} = \frac{18}{\frac{36}{25}-9} = -\frac{450}{189} = -\frac{50}{21}$$

$L.S = R.S$

لذا قيمة $x = -\frac{6}{5}$ تحقق المعادلة

مثال (4) جد مجموعة الحل للمعادلة:

$$\frac{2}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{x^2+4}{x^2-4}$$

قبل ضرب طرفي المعادلة في LCM للمقامات نحاول

تحليل مقام الكسر للطرف الأيمن وتغير $2 - x = -(x - 2)$

باستعمال المعلومة $a - b = -(b - a)$

$$\Rightarrow \frac{2}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{x^2+4}{(x+2)(x-2)}$$

بضرب طرفي المعادلة في LCM $(x+2)(x-2)$

$$\Rightarrow 2(x-2) + x(x+2) = x^2 + 4$$

$$\Rightarrow 2x - 4 + x^2 + 2x - x^2 - 4 = 0 \Rightarrow 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$$

عند التعويض عن $x = 2$ بالمعادلة الأصلية نحصل على عملية قسمة على صفر وهذا غير جائز $(\frac{x}{2-x} = \frac{2}{0})$

لذلك المعادلة ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية (R)، أي مجموعة الحل في R هي مجموعة خالية (∅).

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

الأسئلة (1 - 6) مشابهة للمثالين (1,2)

1. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2} = \frac{6}{4x^2}$
2. $\frac{y}{2} - \frac{7}{5} = \frac{3}{10y}$
3. $\frac{x + 4}{2} = \frac{-3}{2x}$
4. $\frac{y + 1}{y^2} = \frac{3}{4}$
5. $\frac{9x - 14}{x - 5} = \frac{x^2}{x - 5}$
6. $\frac{1}{y^2 - 6} = \frac{2}{y + 3}$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

الأسئلة (7 - 10) مشابهة للمثالين (3,4)

7. $\frac{y - 4}{y + 2} - \frac{2}{y - 2} = \frac{17}{y^2 - 4}$
8. $\frac{9}{x^2 - x - 6} - \frac{5}{x - 3} = 1$
9. $\frac{12}{y^2 - 16} + \frac{6}{y + 4} = 2$
10. $\frac{2x}{x + 1} + \frac{3x}{x - 1} = \frac{8 + 7x + 3x^2}{x^2 - 1}$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

11. $\frac{4}{6x^2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{x}$
12. $\frac{3y}{4} - \frac{6}{12y} + \frac{1}{4} = 0$
13. $\frac{9x + 22}{x^2} = 1$
14. $\frac{9}{(y + 2)^2} = \frac{3y}{y + 2}$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

15. $\frac{3}{x - 4} - \frac{2}{x - 3} = 1$
16. $\frac{y - 5}{y + 5} - \frac{y + 5}{y - 5} = \frac{4y^2 - 24}{y^2 - 25}$
17. $\frac{6 - x}{x^2 + x - 12} - \frac{2}{x + 4} = 1$
18. $\frac{4 + 8y}{y^2 - 9} + \frac{6}{y - 3} = 3$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



19 **رياضة:** إذا أراد راكبُ دراجةٍ قطعَ مسافةِ 60 km بين مدينتين A,B بسرعة معينة، ولو زادت سرعته بمقدار 10 km/h لَتمكَّنَ من قطع هذه المسافة بزمن يقل ساعة واحدة عن الزمن الأول. جد سرعته أولاً.



20 **نقل مسافرين:** تقطعُ طائرةُ الخطوط الجوية العراقية المسافةَ 350 km بين مدينة بغداد وأربيل بسرعة معينة، ولو زادت سرعة الطائرة بمقدار 100 km/h لَتمكَّنَت الطائرةُ من قطع المسافة بزمن يقل 12 دقيقة عن الزمن الأول. جد سرعة الطائرة التقريبية أولاً.

21 **سباق:** شاركَ نوفل في سباق ثلاثي، وتضمن السباق السباحة وركوب الدراجة والجري، واستغرق ساعتين لإنهاء السباق كما موضح في الجدول المجاورعلى اعتبار x تعبر عن معدل سرعته في السباحة. جد معدل سرعته التقريبية في سباق السباحة.

	المسافة km	السرعة km/h	الزمن
السباحة	$d_s = 1$	x	t_s
ركوب الدراجة	$d_b = 20$	$5x$	t_b
الجري	$d_r = 4$	$x + 4$	t_r

ملاحظة: استعمل معادلة الزمن الإجمالي الذي استغرقه نوفل في السباق بدلالة سرعته في السباحة هو:

$$T(x) = t_s + t_b + t_r$$

فَكِّرْ

22 **تحدٍّ:** **جد مجموعة الحل للمعادلة الآتية:**

$$\frac{3}{x+5} + \frac{4}{5-x} = \frac{x^2 - 15x + 14}{x^2 - 25}$$

23 **أُصحِّحُ الخطأ:** استعملَ نميرُ المقدارَ المميز لبيان جذور المعادلة:

$$\frac{2}{x-7} \times \frac{1}{x-1} = 1$$

فقال نمير انّ للمعادلة جذران نسبيان حقيقيان. اكتشف خطأَ نمير وصحِّحه.

أُكتبْ

مجموعة الحل في مجموعة الأعداد الحقيقية :

$$\frac{1}{x+6} - \frac{5}{x-6} = 2$$

الدرسُ [3-7]

خطة حل المسألة (كتابة معادلة)

Problem Solving Plan (Writing Equation)

فكرةُ الدرس

• استعمال استراتيجية كتابة معادلة لحل المسألة.

تعلم

تقطع باخرة شحن مسافة 240 km بين الميناء A والميناء B بسرعة معينة، ولو زادت سرعتها 10 km/h لتمكنت من قطع المسافة بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول. جد سرعة الباخرة أولاً.



إِفهم

ما المعطيات في المسألة؟ باخرة شحن تقطع المسافة 240km بين المدينة A والمدينة B بسرعة معينة، وتقطعها بزمن يقل ساعتين عن الزمن الأول في حالة زادت سرعتها بمقدار 10 km/h .

ما المطلوب من المسألة؟ إيجاد سرعة الباخرة أولاً.

خطّط

كيف تحلّ المسألة؟ أكتب معادلة تمثل المسألة ثم أحلها لإيجاد سرعة الباخرة أولاً.

حلّ

نفرض أن سرعة الباخرة الأولى = v ، الزمن الأول = $\frac{240}{v}$

لذا سرعتها الثانية = v + 10 ، الزمن الثاني = $\frac{240}{v + 10}$

الزمن الأول - الزمن الثاني يساوي 2 $\qquad \frac{240}{v} - \frac{240}{v + 10} = 2$

بضرب طرفي المعادلة في LCM v(v + 10) $\qquad 240\,v + 2400 - 240\,v = 2v(v + 10)$

$2400 = 2v^2 + 20v$

$v^2 + 10v - 1200 = 0 \Rightarrow (v + 40)(v - 30) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} v + 40 = 0 \Rightarrow v = -40 & \text{يهمل} \\ \text{or } v - 30 = 0 \Rightarrow v = 30 \text{ km/h} & \text{سرعة الباخرة أولاً} \end{cases}$

تحقّق

زمن الباخرة الأولى $\qquad \frac{240}{v} = \frac{240}{30} = 8h$

زمن الباخرة الثانية $\qquad \frac{240}{v + 10} = \frac{240}{40} = 6h$

زمن الباخرة الثانية أقل من زمن الباخرة الأولى بمقدار ساعتين (8 - 6 = 2h) ، لذا الحل صحيح.

Problems مسـائل

حل المسائل التالية باستراتيجية (كتابة معادلة)



1 **نافورة:** زُرِعَت منطقةٌ مربعة الشكل طول ضلعها 4m بالورد وسط حديقة فندق مربعة الشكل، فكانت مساحة المنطقة المتبقية من الحديقة المحيطة بها $84\ m^2$. ما طول ضلع الحديقة؟



2 **أسد بابل:** وهو تمثال لأسد عُثِرَ عليه في مدينة بابل الأثرية في العراق في سنة 1776، وهو مصنوع من حجر البازلت الأسود الصلب، وموضوع على منصة منتصف منطقة مستطيلة الشكل طولها يزيد على عرضها بمقدار 2m ومساحتها $15\ m^2$. فما أبعادها؟



3 **الأسد:** وهو من أقوى الحيوانات الموجودة على وجه الأرض ويُلقّب الأسدُ بملِك الغابة نسبةً إلى قوّته بين الحيوانات في الغابة، إذا كانت المعادلة $x^2 - 30x$ تمثل المساحة التي يبسط الأسدُ سيطرتَه عليها بالكيلومتر. ماطول ضلع المنطقة التي يمثلها المتغير x إذا كانت المساحة 175 كيلومتر مربع؟



4 **ألعاب نارية:** في إحدى المناسبات أُطلِقت مجموعةٌ من الألعاب النارية عمودياً في الهواء وصلت إلى ارتفاع 200m. احسب الزمن الذي وصلت به إلى هذا الارتفاع، إذا كانت المعادلة التالية $h = 30t + 2t^2$ تمثِّل العلاقة بين الارتفاع بالأمتار (h) الذي تصل إليه الألعاب النارية بعد t ثانية.

اختبار الفصل

Chapter Test

جد مجموعة حل للمعادلتين بيانياً:

1 $\begin{cases} y = 1 + x \\ y = 2 - x \end{cases}$

2 $\begin{cases} y + x = 0 \\ y - x = 0 \end{cases}$

3 $\begin{cases} y - x - 5 = 0 \\ y + x - 1 = 0 \end{cases}$

جد مجموعة الحل للمعادلتين باستعمال التعويض أو الحذف لكل مما يأتي:

4 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 8 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 4x - 2y = -4 \\ x + y = 6 \end{cases}$

6 $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

7 $9x^2 - 25 = 0$

8 $3y^2 - 12 = 0$

9 $(7 - z)^2 - 1 = 0$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

10 $x^2 = 49$

11 $81 - y^2 = 0$

12 $z^2 = \frac{36}{9}$

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

13 $x^2 + 9x + 18 = 0$

14 $z^2 - 2z - 48 = 0$

15 $3x^2 - x - 10 = 0$

16 $7z^2 - 18z - 9 = 0$

17 ما العدد الذي مربعه ينقص عن أربعة أمثاله بمقدار 3؟

18 حوض سباحة يزيد طوله على مثلَّي عرضه بمقدار 4m ومساحته $48\ m^2$. ما أبعاد المسبح؟

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

19 $x^2 - 16x + 64 = 0$

20 $\frac{1}{9} - \frac{1}{3} z + \frac{1}{4} z^2 = 0$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

21 $x^2 - 14x = 32$

22 $4y^2 + 20y - 11 = 0$

23 $z^2 - \frac{2}{3} z = 1$

جد مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

24 $x^2 - 3x - 7 = 0$

25 $3y^2 - 12y = -3$

26 $5z^2 + 6z = 9$

حدد جذور المعادلة أولاً، ثم جد مجموعة الحل إذا كان ممكناً:

27 $2x^2 + 8x + 8 = 0$

28 $y^2 - 6y - 9 = 0$

29 $4z^2 - 3z + 7 = 0$

30 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذرَي المعادلة $x^2 - (k + 6)x + 9 = 0$ متساويين؟ تحقّق من الإجابة.

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات التالية وتحقق من صحة الحل:

31 $\frac{6x}{5} = \frac{5}{6x}$

32 $\frac{1}{6y^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{y}$

33 $\frac{z + 4}{z^2} = \frac{1}{2}$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

34 $\frac{4}{x - 5} - \frac{3}{x - 2} = 1$

35 $\frac{2y}{y + 2} + \frac{y}{2 - y} = \frac{7}{y^2 - 4}$

الفصلُ 4

الهندسة الاحداثية

Geometrical Coordinates



تعد رياضة التزلج من الرياضات الممتعة في الكثير من مناطق العالم، اذ توفر المنحدرات الجبلية مثالاً جيداً عن الميل.
فكلما زاد ميل المنحدر تطلب مهارة اكبر من المتزلجين.

الاختبارُ القبليّ

عين النقاط على المستوي الاحداثي وحدّد موقعها في الأرباع أو المحاور لكل مما يأتي :

1 $A(3,6)$ 2 $B(-3,-5)$ 3 $C(0,2)$

4 $D(-3,0)$ 5 $E(-4,2)$ 6 $F(3,-2)$

عين النقاط على المستوي الاحداثي، ثم تعرف الى الشكل الناتج لكل مما يأتي:

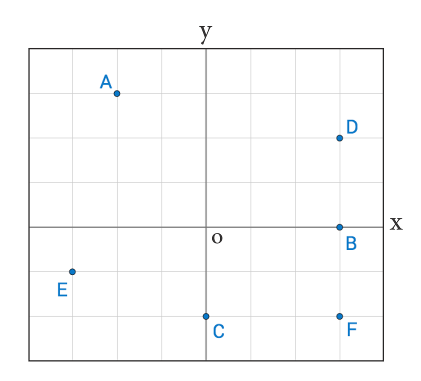
7 $A(0,3), B(3,0) C(-3,0).$

8 $A(1,4), B(2,4) C(4,4), D(6,4).$

9 $A(-2,4), B(-2,-3) C(1,4), D(1,-3).$

10 $A(0,3), B(3,0) C(0,-3), D(-3,0).$

11 اكتب أحداثيات النقاط المؤشرة في المستوي الاحداثي المجاور:



مثّل الجداول التالية بالمستوي الاحداثي:

12

x	y
1	3
2	4
5	7

13

x	y
5	2
-2	-5
0	3

جد قيمة y في كل مما يأتي:

14 $y = 2x - 5,\ x = 0$

15 $y = -x + 7, x = -1$

16 $y = x^2 + x + 2, x = 1$

17 $3y - x^2 = 9, x = -2$

اذا كانت $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$ جد القيمة العددية للمقدار $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ لكل مما يأتي:

18 $A(3,-5), B(-2,1)$

19 $A(-1,5), B(4,5)$

الدرسُ [4-1]
التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الاحداثي
Graphical Representation of the Equations in the Coordinate Plane

فكرةُ الدرس
- تمثيل المعادلة الخطية في المستوي الاحداثي.
- تمثيل المعادلة التربيعية في المستوي الاحداثي.

المفردات
- الزوج المرتب.
- المستوي الاحداثي.
- المعادلة الخطية.
- المعادلة الربيعية.

تعلم

في دراسة لتحديد كمية الحليب التي تحتاج اليها جراء آكل النمل حديثو الولادة باللترات على مدى بضعة أيام، توصل الباحث الى المعادلة:

$2y - x = 0$ حيث x عدد الايام، y كمية الحليب باللترات.

كيف يمكنني تمثيل العلاقة بالمستوي الاحداثي؟



[4-1-1] التمثيل البياني للمعادلة الخطية في المستوي الاحداثي
Graphical Representation of the linear Equation in the Coordinate plane

المعادلة الخطية: الصيغة العامة للمعادلة الخطية هي: $ax + by + c = 0, a, b, c \in R$ حيث a,b لاتساوي صفراً معاً والمتغيرات فيها لاتكون مرفوعة لقوة اكبر من 1 وان، تمثيلها بالمستوي الاحداثي يمثل مستقيماً.

مثال (1) لتمثيل المعادلة $2y - x = 0$ في المستوي الاحداثي نتبع مايأتي:

الخطوة (1): نجعل المعادلة بشكل $y = f(x)$ (أي y بدلالة x)

$$2y - x = 0 \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

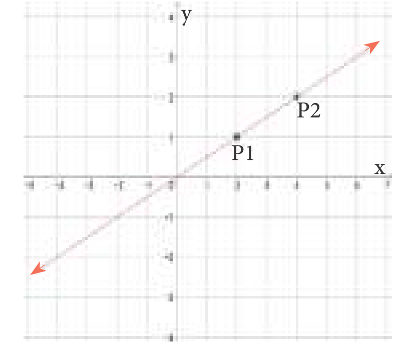
الخطوة (2): اختار في الاقل قيمتين للمتغير x ولتكن x=2, x=4 نعوضهما في المعادلة للحصول على أزواج مرتبة.

$$x = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(2) \Rightarrow y = 1 \Rightarrow P_1(2,1)$$

$$x = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(4) \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P_2(4,2)$$

الخطوة (3): نعمل جدول بالقيم الناتجة ونمثل الازواج المرتبة في المستوي الاحداثي ونصل بين النقطتين، الشكل الناتج يمثل مستقيماً.

x	y	(x,y)
2	1	$P_1(2,1)$
4	2	$P_2(4,2)$



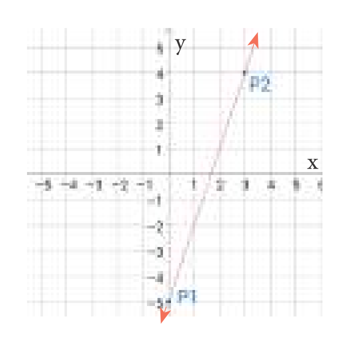
ملاحظة: معادلة المستقيم الذي يمر بنقطة الاصل، خالية من الحد المطلق.

مثال (2) مثِّل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي، ماذا تلاحظ؟

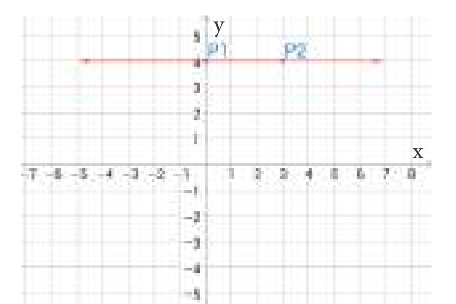
i) $y - 3x + 5 = 0$ ii) $y = 4$ iii) $x = -3$

i) $y - 3x + 5 = 0 \Rightarrow y = 3x - 5$

x	y=3x-5	(x,y)
0	3(0)-5=-5	$P_1(0,-5)$
3	3(3)-5=4	$P_2(3,4)$



المستقيم يقطع محور السينات والصادات ولايمر بنقطة الاصل



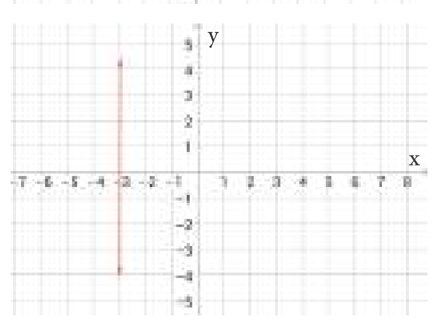
ii) $y = 4$

x	y=4	(x,y)
0	4	$P_1(0,4)$
3	4	$P_2(3,4)$

المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات عند النقطة $(0,4)$

iii) $x = -3$

المستقيم $x=-3$ يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات عند النقطة $(-3,0)$



يمكن وضع ما تقدم في الجدول الآتي:

المعادلة	العلاقة مع المحورين
$ax+by+c=0$	المستقيم يقطع المحورين ولايمر بنقطة الاصل
$ax+by=0$	المستقيم يقطع المحورين في نقطة الاصل
$y = k, k \in R$	المستقيم يوازي محور السينات وعمودي على محور الصادات ويمر بالنقطة $(0,k)$
$x = h, h \in R$	المستقيم يوازي محور الصادات وعمودي على محور السينات ويمر بالنقطة $(h,0)$

[2-1-4] التمثيل البياني للمعادلة التربيعية في المستوي الاحداثي
The Graphical Representation of the Quadratic Equation in the Coordinate Plane

الصيغة العامة للمعادلة التربيعية هي: $y = ax^2 + bx + c$ حيث $a \neq 0, a,b,c \in R$

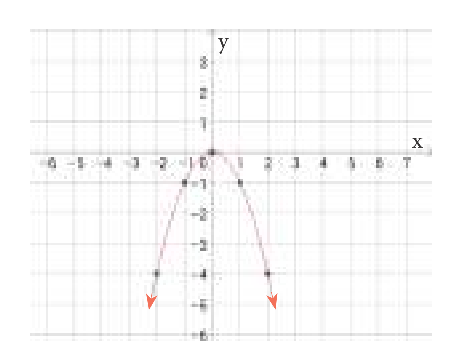
سوف نتطرق في هذا البند الى المعادلة التربيعية بالصيغة $y = ax^2 + c$ حيث $a \neq 0,\ a,c \in R$ وطريقة تمثيلها.

لتمثيل المعادلة $y = ax^2 + c$ نعمل الجدول المجاور

ويكون التمثيل البياني للمعادلة هو $\cup$ او $\cap$

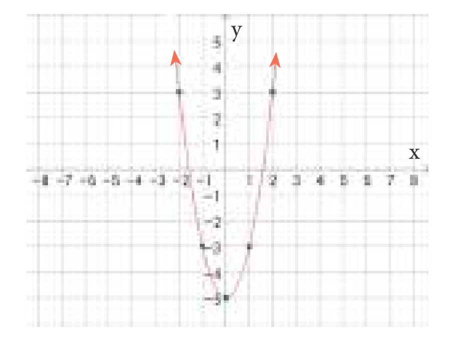
x	$y = ax^2 + c$	y	(x,y)
-2 -1 0 1 2 قيم افتراضية	تعويض قيم x	الناتج	الازواج المرتبة

مثال (3) مثل المعادلة $y = -x^2$



x	$y = -x^2$	y	(x,y)
-2	$-(-2)^2$	-4	(-2,-4)
-1	$-(-1)^2$	-1	(-1,-1)
0	$-(0)^2$	0	(0,0)
1	$-(1)^2$	-1	(1,-1)
2	$-(2)^2$	-4	(2,-4)

مثال (4) مثل المعادلة $y = 2x^2 - 5$



x	$y = 2x^2-5$	y	(x,y)
-2	$2(-2)^2-5$	3	(-2,3)
-1	$2(-1)^2-5$	-3	(-1,-3)
0	$2(0)^2-5$	-5	(0,-5)
1	$2(1)^2-5$	-3	(1,-3)
2	$2(2)^2-5$	3	(2,3)

تأكَّدْ من فهمِكَ

مثل المعادلات الخطية التالية في المستوى الاحداثي وبين علاقتها بالمحورين:

الاسئلة (1-6) مشابه للمثالين (1,2):

1. $y = 3x + 1$
2. $y = -4x$
3. $y + 3x - 2 = 0$
4. $y = 1 - 3x$
5. $y + 5 = 0$
6. $x - 5 = 0$

مثل المعادلات التربيعية التالية في المستوى الاحداثي .

الاسئلة (7-9) مشابه للمثالين (3,4):

7. $y = x^2 + 4$
8. $y = x^2$
9. $y = 1 - 3x^2$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

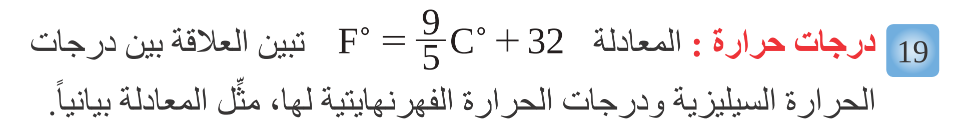
مثِّل المعادلات الخطية التالية في المستوى الاحداثي وبيِّن علاقتها بالمحورين:

10. $y = -x + 4$
11. $y = x$
12. $x = -\frac{5}{2}$
13. $y = 0$

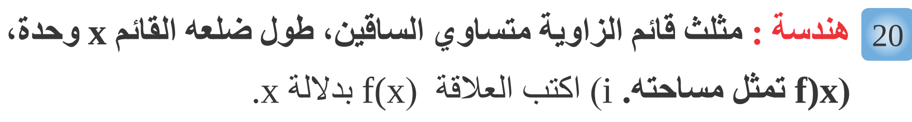
مثِّل المعادلات التربيعية التالية في المستوى الاحداثي .

14. $y = x^2 - 1$
15. $y = 2x^2 + 3$
16. $y = -3x^2$
17. $y = 2x^2$
18. $4y = x^2$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

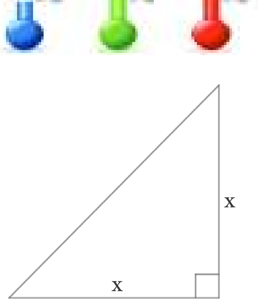


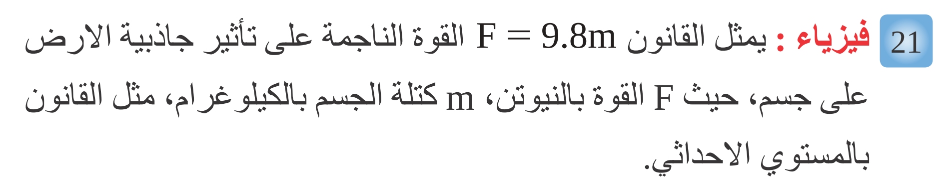
19 **درجات حرارة :** المعادلة $F^{\circ} = \frac{9}{5}C^{\circ} + 32$ تبين العلاقة بين درجات الحرارة السيليزية ودرجات الحرارة الفهرنهايتية لها، مثِّل المعادلة بيانياً.



20 **هندسة : مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين، طول ضلعه القائم x وحدة، f)x) تمثل مساحته.** i) اكتب العلاقة $f(x)$ بدلالة x.

ii) مثِّل العلاقة $f(x)$ في المستوي الاحداثي.



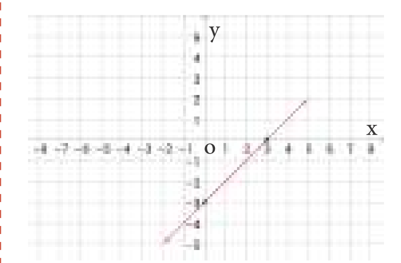


21 **فيزياء :** يمثل القانون $F = 9.8m$ القوة الناجمة على تأثير جاذبية الارض على جسم، حيث F القوة بالنيوتن، m كتلة الجسم بالكيلوغرام، مثل القانون بالمستوي الاحداثي.



22 **اعمال :** تتقاضى شركة معدات بناء 10 الاف دينار كتأمين، يضاف اليها 5 الاف دينار عن كل ساعة، اكتب المعادلة التي تعبر عن المسألة، ثم مثِّلها بيانياً في المستوي الاحداثي.

فَكِّرْ



23 **اكتشف الخطأ:** مثِّل محمد المعادلة الخطية التالية y=-3x+9 بالشكل البياني المجاور. اكتشف خطأ محمد وصححه.

24 **مسألة مفتوحة: أعطِ مثالاً لمعادلة خطية على صورة ax+by+c=0 لكل حالة:**

i) $a = 0$ ii) $b = 0$ iii) $c = 0$

25 **تحدٍ:** شكلت الازواج المرتبة التالية (-1,2),(1,6),(0,4) مستقيماً، ما نقطة تقاطع هذا المستقيم مع محور السينات؟

26 **تبرير:** بيِّن اذا كانت الازواج المرتبة الآتية: $\{(2,4),(1,1),(0,0),(-1,1),(-2,4)\}$ تمثل دالة خطية ام تربيعية.

27 **حس عددي:** $y = x + 1$, $y = x^2 + 1$ ايهما تمثل دالة تربيعية؟ وضح ذلك.

أُكتبْ

خطوات تبين ان y=4x+3 معادلة خطية؟

الدرسُ]4-2[ميل المستقيم Slope of the Line

فكرةُ الدرس
- ايجاد ميل المستقيم
- ايجاد المقطع الصادي
- ايجاد المقطع السيني

المفردات
- التغير العمودي
- التغير الافقي
- المقطع السيني
- المقطع الصادي
- الميل

تعلم

المنحدرات الجبلية تُعدّ مثلاً جيداً على الميل، فكلما زاد ارتفاع الجبل زاد الميل.

كيف يمكننا تحديد ميل المنحدرات؟



]4-2-1[ايجاد ميل المستقيم Finding the Slope of the line

الميل: يُعرف ميل المستقيم غير الرأسي بانه النسبة بين التغير العمودي و التغير الافقي.

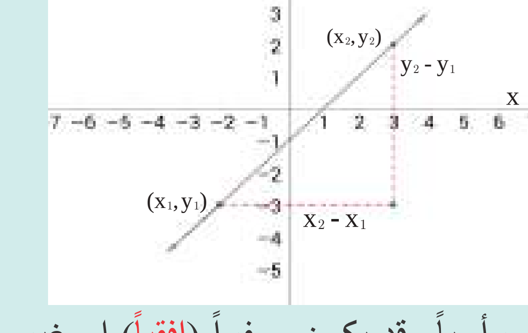
التغير العمودي: هو التغير الصادي ويساوي y_2-y_1

التغير الافقي: هو التغير السيني ويساوي x_2-x_1

الميل = $\dfrac{\text{التغير الصادي}}{\text{التغير السيني}}$

اي: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ حيث $x_2 - x_1 \neq 0$

m: هو ميل المستقيم المار بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$



يمكن ان يكون ميل المستقيم موجباً او سالباً اذا لم يكن افقياً او رأسياً وقد يكون صفراً (افقياً) او غير محدد (رأسياً).

مثال (1) جد ميل المستقيم المار بنقطتين في كل مما يأتي:

i) $A(5,7), B(-2,1)$

$m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ميل المستقيم المار بنقطتين

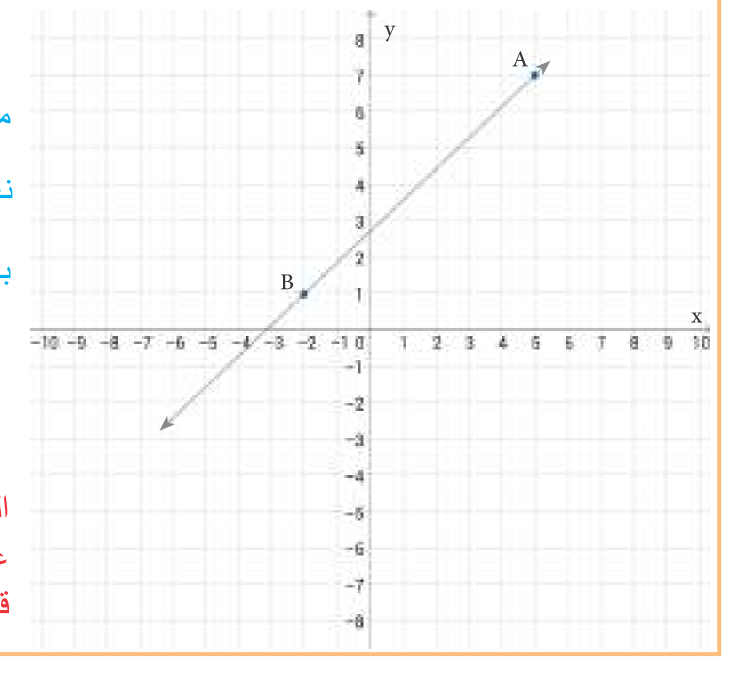
$m = \dfrac{1-7}{-2-5}$ نعوض بالنقطتين

$m = \dfrac{-6}{-7}$ بالتبسيط

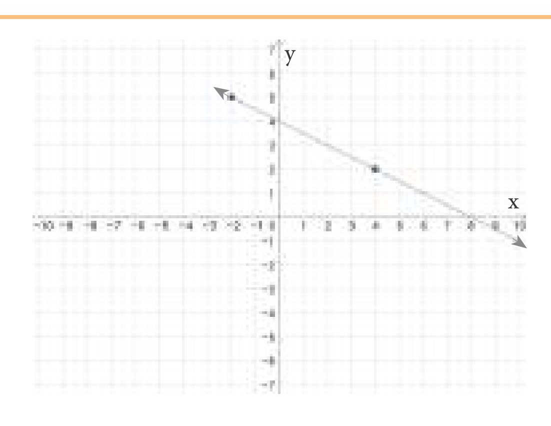
$m = \dfrac{6}{7}$

لذا ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\dfrac{6}{7}$ (موجب)

الميل موجب (المستقيم نحو الاعلى) عند التحرك من اليسار الى اليمين قيم y تتزايد.



ii) A (-1,5) , B (4,2)



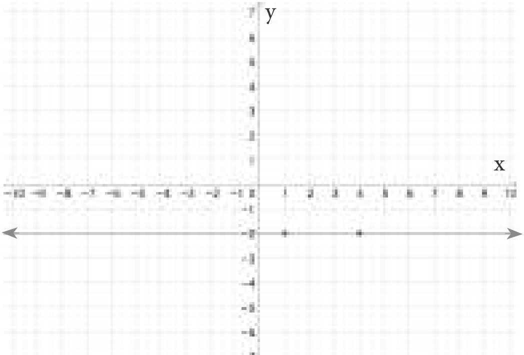
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ميل المستقيم المار بنقطتين

$= \frac{2 - 5}{4 - (-1)}$ نعوض بالنقطتين

$= \frac{-3}{5}$ لذا ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو $\frac{-3}{5}$ (سالب)

الميل سالب (المستقيم نحو الاسفل) عند التحرك من اليسار الى اليمين، قيم y تتناقص.

iii) A (1, - 2) , B (4, - 2)



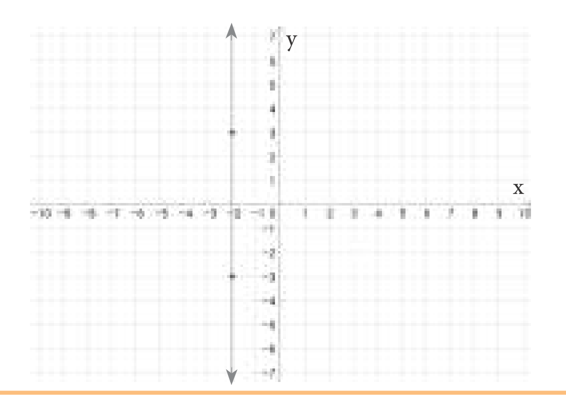
$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ميل المستقيم المار بنقطتين

$= \frac{-2 - (-2)}{4 - 1}$ نعوض بالنقطتين

$= \frac{0}{3} = 0$ لذا ميل $\overleftrightarrow{AB}$ هو 0

الميل صفر (المستقيم افقي) يوازي محور السينات، قيم y ثابتة.

iv) A (-2,3) , B (-2, - 3)



$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ميل المستقيم المار بنقطتين

$= \frac{-3 - 3}{(-2) - (-2)}$ نعوض بالنقطتين

$= \frac{-6}{0}$ لايجوز القسمة على 0 لذا ميل $\overleftrightarrow{AB}$ غير محدد

الميل غير محدد (المستقيم شاقولي) يوازي محور الصادات، قيم x ثابتة

مثال (2) يُمثّل الجدول المجاور تغير درجات الحرارة بالزمن (بالساعات)، جد ميل المستقيم واشرح مايعنيه.

الزمن (الساعات)	درجات الحرارة
1	-2
2	1
3	4
5	10

اختار اي نقطتين من الجدول ولتكن $(x_1, y_1) = (1, -2)$

$(x_2, y_2) = (3, 4)$

$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ميل المستقيم المار بنقطتين

$= \frac{4 + 2}{3 - 1} = \frac{6}{2} = 3$ التعويض والتبسيط

بما ان ميل المستقيم 3 فان درجات الحرارة تزداد 3 درجات سيليزية كل ساعة.

[2-2-4] تقاطع المستقيم مع المحورين في المستوي الاحداثي

Intersection of the Line with axes in Coordinate plane

يمكنك ان تمثل بسهولة معادلة المستقيم من خلال ايجاد نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين.

المقطع السيني: هو قيمة x من تقاطع المستقيم مع محور السينات، اي بالتعويض من $y = 0$. ونقطة التقاطع $(x,0)$

المقطع الصادي: هو قيمة y من تقاطع المستقيم مع محور الصادات، اي بالتعويض من $x = 0$. ونقطة التقاطع $(0, y)$

مثال (3) جد المقطع السيني والصادي للمستقيم $3x + 5y = 15$.

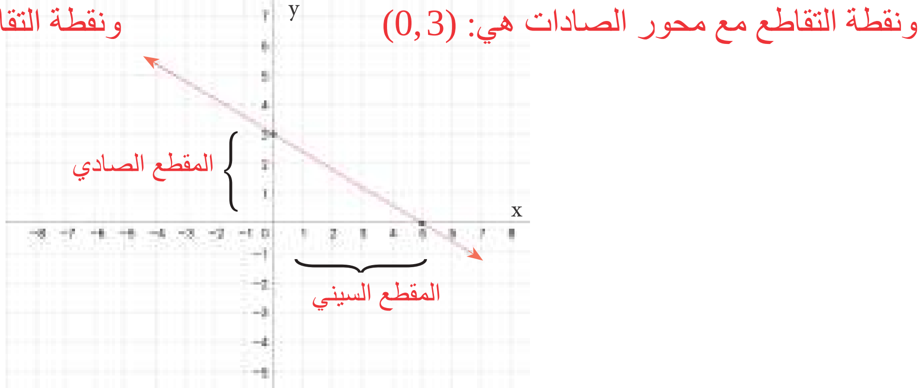
المقطع الصادي		المقطع السيني	
المعادلة	$3x + 5y = 15$	المعادلة	$3x + 5y = 15$
نعوض من $x = 0$	$3(0) + 5y = 15$	نعوض من $y = 0$	$3x + 5(0) = 15$
تبسيط	$5y = 15$	تبسيط	$3x = 15$
بقسمة طرفي المعادلة على 5	$y = \frac{15}{5}$	بقسمة طرفي المعادلة على 3	$x = \frac{15}{3}$
	$y = 3$		$x = 5$

لذا المقطع الصادي هو 3.

ونقطة التقاطع مع محور الصادات هي: $(0,3)$

لذا المقطع السيني هو 5.

ونقطة التقاطع مع محور السينات هي: $(5,0)$



مثال (4) **جد المقطع السيني والصادي ان وجد لكل مما يأتي:**

ii) $y = 4$

$y=4$ تمثل المقطع الصادي ونقطة التقاطع $(0,4)$

المستقيم // محور السينات

i) $x = -2$

$x=-2$ يمثل المقطع السيني ونقطة التقاطع $(-2,0)$

المستقيم // محور الصادات

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين، أموجب الميل أم سالب أم صفر أم غير محدد، ثم حدِّد اتجاه حركته لكل مما يأتي:

الاسئلة (1-6) مشابهة للمثالين (1,2):

1. $(-2,-2), (-4,1)$
2. $(0,0), (3,2)$
3. $(-4,4), (2,-5)$
4. $(5,0), (0,2)$
5. $(4,3), (4,-3)$
6. $(-6,-1), (-2,-1)$

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما يأتي:

الاسئلة (7-18) مشابهة للمثالين (3,4):

7. $3x + 6y = 18$
8. $y + 2 = 5x - 4$
9. $y = -4x$
10. $y = -x + 8$
11. $5x = y - 8$
12. $y = -\frac{3}{4}x - 5$
13. $2x + 6y = 12$
14. $y + 4 = 2x - 4$
15. $y = -5x$
16. $x = 4$
17. $3y = -6$
18. $y = -\frac{1}{2}x + 4$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد ميل المستقيم المار بالنقطتين، أموجب الميل أم سالب أم صفر أم غير محدّد ثم حدد اتجاه حركته لكل مما يأتي:

19) $(6,2),(0,2)$

20) $(-2,-3),(2,4)$

21) $(3,-5),(0,0)$

22) $(\frac{3}{2},\frac{1}{4}),(\frac{3}{2},\frac{3}{4})$

جد المقطع السيني والمقطع الصادي لكل مما ياتي:

23) $3y - 7x = 9$

24) $y = -\frac{3}{2}x$

25) $x = -4$

26) $0 = y + 3$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

27) **فيزياء:** يمثل الجدول المجاور كمية السائل المتدفق من حوض خلال فترة زمنية، جد ميل المستقيم الذي يمثله الجدول. وفسِّر مايعنيه.

كمية السائل المتسرب	
الزمن (ثوان)	حجم السائل m^3
10	40
13	52
16	64
19	76

28) **نبات: اذا كان طول نبتة 30cm، في غضون كل شهرين تنمو بمقدار ثابت 4cm اخرى.**

i) اكمل الجدول.

ii) ما ميل المستقيم الذي تمثله العلاقة بين طول النبتة والزمن؟

iii) اكتب الدالة الخطية التي يمثلها الجدول.

iv) مثّل الدالة في المستوى الاحداثي.

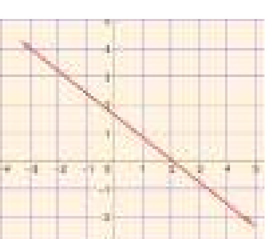
الزمن	0	2	4
طول النبتة			

فَكِّرْ

29) **تحدٍ:** جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بنقطتين $(1,6),(-5,a)$ يساوي $\frac{1}{2}$.

30) **تفكير ناقد:** هل يمكنك تحديد ميل مستقيم يمر بالنقطتين $(7,-3),(7,3)$ ؟

31) **اكتشف الخطأ:** ميل المستقيم الذي يمر في النقطتين $(0,3),(3,-1)$ هو $\frac{3}{4} = \frac{3-0}{3-(-1)}$ اكتشف الخطأ وصححه.



32) **مسألة مفتوحة:** اذكر نقطتين على مستقيم يكون ميله $= -\frac{1}{3}$

33) **تفكير ناقد:** من الشكل البياني المجاور حدّد اتجاه المستقيم.

أُكتبْ

باسلوبك ماذا يعني الميل يساوي صفراً، والميل غير محدد.

الدرسُ]4-3[

معادله المستقيم The Equation of the Line

فكرةُ الدرس

ايجاد معادلة مستقيم علم منه:

- نقطتان
- ميل - نقطة
- ميل - مقطع

المفردات

- الميل
- المقطع

تعلم

يقطع راكب دراجة هوائية 20 كيلو متراً في ساعتين و يقطع 50 كيلو متراً في خمس ساعات، ما المعادلة الخطية التي تربط بين المسافة و الزمن؟



]4-3-1[كتابة معادلة مستقيم بمعرفة نقطتين منه
Writing Equation of Line with two Points of it

معادله مستقيم يمر بالنقطتين $B(x_2,y_2), A(x_1,y_1)$

تعلمت سابقاً ايجاد ميل مستقيم يمر بالنقطتين A,B حيث $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

على فرض ان النقطة $C(x,y)$ تقع على المستقيم فيكون ميل المستقيم المار بالنقطتين A,C هو $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

من المعلوم ان ميل المستقيم ثابت في جميع نقاطه لذلك فإن:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

هذه المعادلة تمثل معادله المستقيم AB.

مثال (1) نجد المعادلة الخطية في فقرة (تعلم):

نفرض ان $A(2,20)$, $B(5,50)$, $C(x,y) \in \overleftrightarrow{AB}$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$x_1 = 2, y_1 = 20$ $\qquad x_2 = 5, y_2 = 50$

كتابة معادلة المستقيم المار بنقطتين
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

التعويض من $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$
$$\frac{y - 20}{x - 2} = \frac{50 - 20}{5 - 2}$$

بالتبسيط
$$\frac{y - 20}{x - 2} = \frac{30}{3}$$

الضرب التبادلي
$$y - 20 = 10x - 20$$

$$y = 10x$$

اذن معادلة المستقيم هي $y - 10x = 0$

]4-3-2[كتابة معادلة المستقيم بمعرفة ميله ونقطة منه
Writing Equation of Line with the Slop and one Point of it

معادلة مستقيم ميله m ويمر بالنقطة (x_1,y_1):

تعلمت سابقاً معادلة مستقيم يمر بنقطتين و التي هي
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وتعلمت ان ميل مستقيم مار بالنقطتين $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ هو
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

لذلك يمكن كتابة المعادلة في أعلاه بشكل
$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

وبالضرب التبادلي نحصل على المعادلة المطلوبة $y - y_1 = m(x - x_1)$

مثال (2) استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

i) $y - 3 = -5(x - 2)$ ii) $y + 7 = \frac{2}{5}x$

i)

$y - 3 = -5(x - 2)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالمقارنة معادلة الميل - النقطة

$m = -5, (x_1, y_1) = (2, 3)$

ii)

$y - (-7) = \frac{2}{5}(x - 0)$

$y - y_1 = m(x - x_1)$ بالمقارنة معادلة الميل - النقطة

$m = \frac{2}{5}, (x_1, y_1) = (0, -7)$

مثال (3) جد معادلة المستقيم الذي ميله $\frac{1}{2}$ ومقطعه السيني يساوي -1 .

معادلة الميل - النقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

الميل، النقطة $m = \frac{1}{2}, \quad x_1 = -1, \quad y_1 = 0 \Rightarrow p(-1, 0)$

بالتعويض من الميل و النقطة $y - 0 = \frac{1}{2}(x - (-1))$

بالتبسيط $y = \frac{1}{2}(x + 1)$

ضرب طرفي المعادلة في 2 $2y = x + 1$

معادلة المستقيم المطلوب $2y - x = 1$

[4-3-3] كتابة معادلة المستقيم بمعرفه ميله ومقطعه مع أحد المحورين

Writing Equation of the Line with the Slope of it and one intercept with axes

معادلة المستقيم بدلالة ميله m ومقطعه الصادي k هي: $y = mx + k$

مثال (4) استعمل معادلة الميل و المقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

i) $2x + 3y = 6$ ii) $5x = 7y + 8$ iii) $y = x$ iv) $y = 1$ v) $y = 0$ vi) $y + x = 5$

i)

بقسمة طرفي المعادلة على 3 $2x + 3y = 6 \Rightarrow 3y = -2x + 6$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

$y = \frac{-2}{3}x + 2$

$y = mx + k$

$\therefore m = \frac{-2}{3}, \quad k = 2$

ii)

بقسمة المعادلة على 7 $5x = 7y + 8 \Rightarrow 7y = 5x - 8$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

$y = \frac{5}{7}x - \frac{8}{7}$

$y = mx + k$

$\therefore m = \frac{5}{7}, \quad k = \frac{-8}{7}$

iii) $y = x \Rightarrow y = 1x + 0$

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

$y = 1x + 0$

$y = mx + k$

$\therefore m = 1, \quad k = 0$

iv)

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

$y = 0x + 1$

$y = mx + k$

$\therefore m = 0, \quad k = 1$

v)

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

$y = 0x + 0$

$y = mx + k$

$\therefore m = 0, k = 0$

vi)

المقارنة مع معادلة الميل - مقطع

$y = -1x + 5$

$y = mx + k$

$\therefore m = -1, \quad k = 5$

مثال (5) مستقيم يمر في النقطة $(5, -1)$ وميله $\frac{-2}{5}$. جد مقطعه ومعادلته.

الطريقة الثانية

معادلة الميل - النقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

معطى $m = \frac{-2}{5}, p(5, -1)$

بالتعويض من النقطة و الميل $y - (-1) = \frac{-2}{5}(x - 5)$

بضرب المعادلة في 5 $5y + 5 = -2x + 10$

بقسمة المعادلة على 5 بعد التبسيط $5y = -2x + 5$

معادلة المستقيم $y = \frac{-2}{5}x + 1$

الطريقة الاولى

معادلة الميل - المقطع $y = mx + k$

معطى $m = \frac{-2}{5}$

بالتعويض من الميل $y = \frac{-2}{5}x + k$

بالتعويض بالنقطة $-1 = \frac{-2}{5}(5) + k$

بالتبسيط $-1 = -2 + k$

$k = 1$ معادلة المستقيم $y = \frac{-2}{5}x + 1$

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي:

الاسئلة (1-2) مشابه للمثال 1

2) $(0, 2), (2, -4)$

1) $(-3, 1), (2, -1)$

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

الاسئلة (3-4) مشابه للمثال 2

4) $y + 1 = -x + 4$

3) $y - 1 = 2(x - 3)$

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه:

الاسئلة (5-6) مشابه للمثالين 5،3

6) $(-1, -3), \frac{1}{3}$

5) $(4, 6), \frac{-2}{5}$

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

الاسئلة (7-8) مشابه للمثال 4

8) $-y = 7x$

7) $5y = -2x - 1$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد معادلة المستقيمات التي يمر كل منها بنقطتين فيما يأتي:

10) $(0, 7), (-5, 0)$

9) $(0, 0), (-3, 7)$

استعمل معادلة الميل والنقطة لكل مستقيم لتحديد ميله والنقطة المار بها:

12) $y - x = 8$

11) $y + \frac{3}{2} = -5(x - 8)$

جد معادلة المستقيم لكل مما يلي ثم جد مقطعه:

14) $(1, -4)$, الميل $= \frac{-1}{2}$

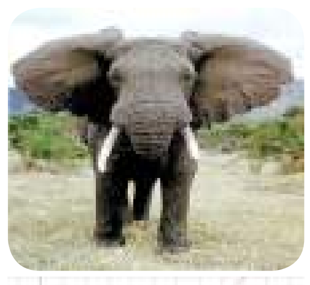
13) $(-3, 7)$, الميل $= -3$

استعمل معادلة الميل والمقطع لكل مستقيم لتحديد ميله ومقطعه:

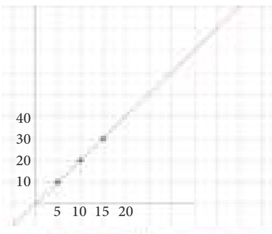
16) $\frac{1}{3}y = -5x - 1$

15) $y + 7 = 3x + 5$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



17 **أحياء :** ينمو ناب الفيل طول حياته بمعدل 1cm لكل شهر. افرض أنك بدأت بمراقبه فيل عندما كان طول نابه 100cm. اكتب على صورة الميل - النقطة معادلة تمثل نمو ناب الفيل بعد n شهر من المراقبة.



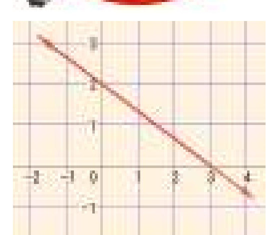
18 **فيزياء :** التمثيل البياني المجاور يمثل كمية المياه المتسربة من خزان خلال مدة زمنية محددة. اكتب على صورة نقطتين، معادلة تمثل تسرب المياه بعد n ثانية.



19 **نقود:** يريد شخص تسديد مبلغ قدره 30 مليون دينار، بدفعات شهرية متساوية مقدارها 1.5 مليون دينار. المعادلة الخطية الآتية $y = -1.5x + 30$ حيث y القيمة الباقية من المبلغ، x عدد الاشهر، استعمل معادلة الميل - المقطع لتحديد ميله ومقطعه.



20 **صحة:** في دراسة حديثة توصلت الى ان الشخص يفقد 2 ساعة من عمره عند استهلاكه علبة سكائر واحدة. اكتب المعادلة التي تمثل ذلك، ومثّلها بيانياً



21 **هندسة:** استعمل المعلومات في الشكل المجاور وجد معادلة المستقيم في الحالات الآتية:

i) نقطتان　　ii) ميل - نقطة　　iii) ميل - مقطعه الصادي

فَكِّرْ

22 **تفكير ناقد:** هل يوجد مستقيم ميله 4 ويمر بالنقطتين $(5,7),(8,-2)$ ؟ إن وجدت مستقيماً كهذا فاكتب معادلته وإلا فعلل جوابك.

23 **تحدٍّ:** مستقيم تقاطعه الأفقي النظير الجمعي لتقاطعه العمودي، ويمر في النقطة $(2,3)$.اكتب معادلة الميل - النقطة لهذا المستقيم.

24 **ايهما صحيح:** معادلة مستقيم ميله $\frac{3}{5}$ ويمر بالنقطة $(-1,7)$.

كتب احمد المعادلة بشكل $y - 7 = \frac{5}{3}(x+1)$

وكتب محمد المعادلة بشكل $y - 7 = \frac{3}{5}(x+1)$ أيهما اجابته صحيحة؟

أُكتبْ

مسألة من واقع الحياة يمكن تمثيلها بمعادلة الخط المستقيم.

الدرسُ [4-4] المستقيمات المتوازية و المتعامدة Parallel and Perpendicular Lines

فكرةُ الدرس
- التمييز بين المستقيمات المتوازية.
- التمييز بين المستقيمات المتعامدة.

المفردات
- المستقيمات المتوازية.
- المستقيمات المتعامدة.

تعلم

يظهر في الشكل المجاور عدة مستقيمات منها ما هي متوازية ومنها ماهي متعامدة. كيف نميز بين توازي هذه المستقيمات او تعامدها؟



[4-4-1] المستقيمات المتوازية Parallel Lines

تعرفت سابقاً الى توازي المستقيمات والشروط اللازمة لذلك:

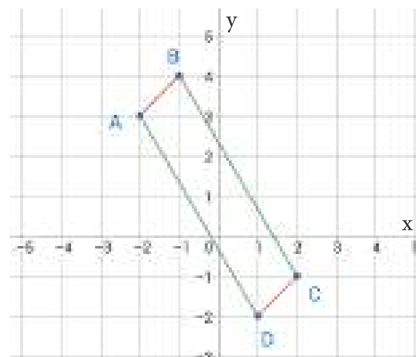
فالمستقيمان المتوازيان: يقعان في مستوى واحد وليس بينهما نقطة مشتركة.

في هذا الدرس سوف نميز المستقيمان المتوازيان من خلال ميلهما:

يكون اي مستقيمين متوازيين عندما يتساوى ميلهما بشرط انهما غير عاموديين:

الصيغة الرياضية: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = m_2$

مثال (1) بيِّن ان النقط $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ رؤوس متوازي الاضلاع ABCD باستعمال الميول.



قانون الميل بين نقطتين $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض $m\overleftrightarrow{CD} = \dfrac{-2-(-1)}{1-2}$ ، $m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{4-3}{-1-(-2)}$

بالتبسيط $m\overleftrightarrow{CD} = \dfrac{-1}{-1}$ ، $m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{1}{1}$

$m\overleftrightarrow{CD} = 1$ ، $m\overleftrightarrow{AB} = 1$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{CD} \quad \therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$

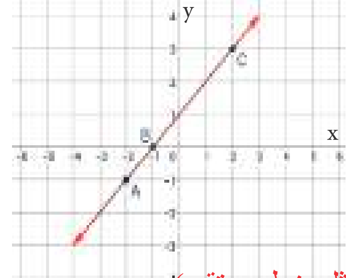
و بالطريقة نفسها

$m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{-5}{3}$ ، $m\overleftrightarrow{AD} = \dfrac{-5}{3}$

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$

∴ الشكل ABCD متوازي اضلاع (تعريف متوازي الاضلاع)

مثال (2) اثبت ان النقط: $A(-2,-1), B(-1,0), C(2,3)$ تقع على استقامة واحدة. (تقع على مستقيم واحد).



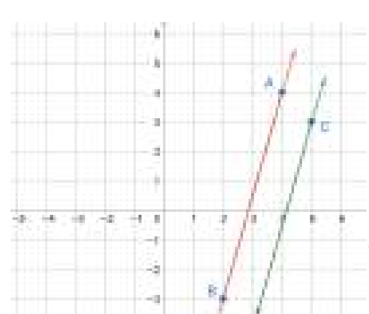
قانون الميل بين نقطتين $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ، $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض $m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{3-0}{2-(-1)}$ ، $m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{0-(-1)}{-1-(-2)}$

بالتبسيط $m\overleftrightarrow{BC} = \dfrac{3}{3} = 1$ ، $m\overleftrightarrow{AB} = \dfrac{1}{1} = 1$

$\because m\overleftrightarrow{AB} = m\overleftrightarrow{BC}$ ∴ النقط A,B,C تقع على استقامة واحدة. (اي تمثل خط مستقيم)

مثال (3) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة C(5,3) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $A(4,5), B(2,-3)$.



نجد ميل المستقيم المار بالنقطتين A,B

ميل المستقيم المار بنقطتين $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{-3-5}{2-4} = \frac{-8}{-2} = 4$

∵ المستقيمان متوازيان. ∴ ميل المستقيم المطلوب $m\overleftrightarrow{L_2} = 4$ (الميل نفسه).

نجد معادلة المستقيم المطلوب.

معادلة مستقيم ميل - نقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويض $y - 3 = 4(x - 5)$

بالتبسيط $y = 4x - 17$ معادلة المستقيم المطلوب.

مثال (4) ليكن: $\overleftrightarrow{L_1}: y = \frac{-5}{3}x + 4, \overleftrightarrow{L_2}: y = \frac{5}{3}x + 4, \overleftrightarrow{L_3}: y = \frac{-5}{3}x - 4$ أي المستقيمات متوازية. ولماذا؟

ميله ومقطعه الصادي $\overleftrightarrow{L_1}: y = \frac{-5}{3}x + 4 \Rightarrow m_1 = \frac{-5}{3} \quad , \quad k_1 = 4$

ميله ومقطعه الصادي $\overleftrightarrow{L_2}: y = \frac{5}{3}x + 4 \Rightarrow m_2 = \frac{5}{3} \quad , \quad k_2 = 4$

ميله ومقطعه الصادي $\overleftrightarrow{L_3}: y = \frac{-5}{3}x - 4 \Rightarrow m_3 = \frac{-5}{3} \quad , \quad k_3 = -4$

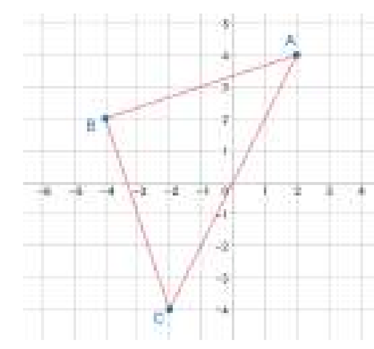
$m_1 = m_3 \Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_3}, k_1 \neq k_3$

[2-4-4] المستقيمات المتعامدة Perpendicular Lines

تعرفت سابقاً الى ان المستقيمين المتعامدين يلتقيان في نقطة واحدة ويصنعان اربعة زوايا قائمة ويقعان في مستو واحد.
في هذا الدرس سوف نميز المستقيمات المتعامدة من خلال ميلهما بشرط ألا يوازي اي منهما المحورين الاحداثيين.
يكون المستقيمان متعامدين عندما يكون ميل احدهما مقلوب ميل الاخر بعكس الاشارة.(حاصل ضربهما يساوي (1- =
الصيغة الرياضية:

$\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Leftrightarrow m_1 = \frac{-1}{m_2}$ أو ان: $m_1 \times m_2 = -1$

مثال (5) بيّن ان النقط: $A(2,4), B(-4,2), C(-2,-4)$ رؤوس لمثلث قائم الزاوية. حدّد الزاوية القائمة فيه.



ميل المستقيم المار بنقطتين $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

بالتعويض

$m\overline{BC} = \frac{-4-2}{-2-(-4)} = \frac{-6}{2} = \frac{-3}{1}$

$m\overline{AC} = \frac{-4-4}{-2-2} = \frac{-8}{-4} = \frac{2}{1}$

$m\overline{AB} = \frac{2-4}{-4-2} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \times \frac{-3}{1} = -1 \quad \Rightarrow m\overline{AB} \times m\overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{BC} \quad \Rightarrow m\angle B = 90^\circ$

مثال (6) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة C(3,-4) والعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $A(0,3), B(2,-2)$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

بالتعويض في الميل والمستقيم المار بنقطتين

$$m\overleftrightarrow{L_1} = \frac{-2-3}{2-0} = \frac{-5}{2}$$

∵ المستقيمان متعامدان ∴ $m\overleftrightarrow{L_2} = \frac{2}{5}$ (مقلوب ميل $\overleftrightarrow{L_1}$ بعكس الاشارة)

معادلة مستقيم ميل - نقطة $y - y_1 = m(x - x_1)$

بالتعويض $y + 4 = \frac{2}{5}(x - 3)$

بالتبسيط $y = \frac{2}{5}x - \frac{26}{5}$ معادلة المستقيم المطلوب.

مثال (7) جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3,1), (a,-4)$ عمودي على المستقيم الذي ميله $-\frac{1}{5}$.

بما ان المستقيمين متعامدان، اذن ميل المستقيم المطلوب هو 5 (مقلوبه بعكس الاشارة)

ميل المستقيم المار بنقطتين وبالتعويض

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{5}{1} = \frac{-4-1}{a-3}$$

الضرب التبادلي

$$5a - 15 = -5$$

بقسمة طرفي المعادل على 5

$$5a = 10$$

$$a = 2$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

1. المستقيم AB يمر بالنقطتين $A(-2,4), B(a,6)$ ، عمودي على المستقيم CD الذي يمر بالنقطتين $C(6,-6), D(2,-7)$ ، جد قيمة a. *(الاسئلة (2-1) مشابهة للمثال 7)*
2. جد قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(3,2), (6,a)$ يساوي $\frac{-1}{4}$. *(السؤال 3 مشابه للمثال 1)*
3. برهن ان الشكل ABCD متوازي اضلاع حيث: $A(3,0), B(0,4), C(-3,0), D(0,-4)$.
4. برهن ان $\triangle ABC$ حيث: $A(-5,-7), B(-8,-2), C(-4,-3)$ قائم الزاوية، ثم حدِّد الزاوية القائمة. *(السؤال 4 مشابه للمثال 5)*
5. أثبت ان النقط: $A(0,-1), B(4,2), C(8,5)$ تقع على استقامة واحدة. *(السؤال 5 مشابه للمثال 2)*
6. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (-4,0) والعمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(3,-2), (6,0)$ *(السؤال 6 مشابه للمثالين 3,6)*

تدربْ وحلّ التمريناتِ

7. المستقيم AB حيث $A(0,2), B(3,0)$ المستقيم CD حيث $C(6,-2), D(9,-4)$ والمستقيم EF حيث $E(0,-5), F(2,-2)$ ماعلاقة $\overleftrightarrow{AB}$ بالمستقيمين EF,CD ؟ بيِّن ذلك.
8. هل النقط $A(0,-7), B(1,-1), C(2,3)$ تقع على مستقيم واحد؟ بيِّن ذلك.
9. برهن ان الشكل ABCD مستطيل حيث: $A(1,4), B(2,6), C(8,3), D(7,1)$.
10. جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (1,-1) والموازي للمستقيم المار بالنقطتين $(3,-2), (6,0)$.

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

المياه المتدفقة	
الزمن (ثوان)	حجم الماء m^3
5	75000
10	150000
15	225000

11 **فيزياء :** يمثل الجدول المجاور كمية المياه المتدفقة من احد السدود خلال فترة معينة من الزمن. هل بيانات الجدول تمثل خط مستقيم؟ بيِّن ذلك.

12 **هندسة :** برهن ان الشكل ABCD شبه منحرف. حيث ان احداثيات القاعدة العليا $(4,5),(6,2)$ والقاعدة السفلى $(2,-1),(-2,5)$. هل هو قائم الزاوية؟ بيِّن ذلك.

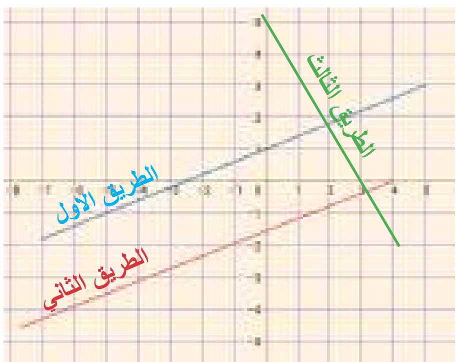
13 **خريطة : استعمل الخريطة المجاورة لتبين أن:**

i) الطريق الاول يوازي الطريق الثاني.

ii) الطريق الثاني عمودي على الطريق الثالث.

iii) هل الطريق الاول عمودي على الطريق الثالث؟

بين ذلك.



فكِّرْ

14 **تحدٍّ:** هل النقاط الآتية: $(2,3),(4,5),(-1,0),(-2,-1)$ تقع على استقامة واحدة؟ بيِّن ذلك.

15 **أُصحّح الخطأ:** قال احمد ان المستقيم المار بالنقطتين $(0,4),(-3,0)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $(0,0),(1,\frac{3}{4})$ اكتشف خطأ احمد وصحّحه.

16 **مسألة مفتوحة:** المعادلتان الآتيتان: $3y-5x=15$, $3y-5x=20$ تمثلان مستقيمين متوازيين. ما التشابه والاختلاف بينهما؟ وضح ذلك

17 **تبرير:** لماذا النقاط التالية تقع على مستقيم يوازي محور السينات: $(2,4),(0,4),(-1,4)$ ؟

18 **أيهما اصح:** قالت سارة ان ميل المستقيم $5y+2x=10$ هو $\frac{2}{5}$ ومقطعه هو 2، وقال مهند ان ميله $\frac{-2}{5}$ ومقطعه 2، بيِّن اجابة أي منهما الصحيحة ؟

19 **مسألة مفتوحة:** ABCD معين رؤوسه $A(0,3),B(3,4),C(2,1),D(-1,0)$ برهن ان قطريه متعامدان.

20 **مسألة مفتوحة:** ما وجه التشابه والاختلاف بين المستقيمين المتوازيين؟

أُكتبْ

ما اذا كان المستقيمان متوازيين او متعامدين باستعمال ميلهما؟

الدرسُ [4-5] المسافه بين نقطتين

Distance Between Two Points

فكرةُ الدرس

- تعرف الى قانون المسافة بين نقطتين.
- تطبيق قانون المسافة بين نقطتين.
- تعرف الى قانون نقطة المنتصف.
- تطبيق قانون نقطة المنتصف.

المفردات

- قانون المسافة بين نقطتين.
- نقطة المنتصف.
- قانون نقطة المنتصف.

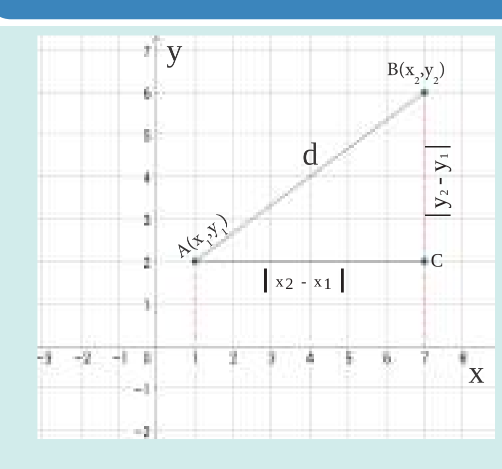
تعلم

ثلاثة اصدقاء خرجوا في رحلة استكشافية، محددة مواقعهم كما في الشكل المجاور.

محمد يبعد من أحمد 3km ومهند يبعد من احمد 4km.

كيف تجد المسافه بين محمد و مهند؟

[4-5-1] قانون المسافه بين نقطتين — Distance between two Points Formula



تعلمت سابقاً: ان المسافة بين نقطتين على محور السينات هي $|x_2 - x_1|$

وإن المسافة بين نقطتين على محور الصادات هي $|y_2 - y_1|$

في هذا الدرس سوف نتعرف الى قانون المسافة في المستوي الاحداثي

قانون المسافة بين نقطتين A,B يعتمد على مبرهنة فيثاغورس

المثلث ACB قائم الزاوية في C

مبرهنة فيثاغورس $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$

بالتعويض $d^2 = (|x_2 - x_1|)^2 + (|y_2 - y_1|)^2$

بالتبسيط و جذر الطرفين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

مثال (1) من فقرة تعلم: نجد ان موقع محمد هو النقطة $A(3,0)$ وان موقع مهند هو النقطة $B(0,4)$

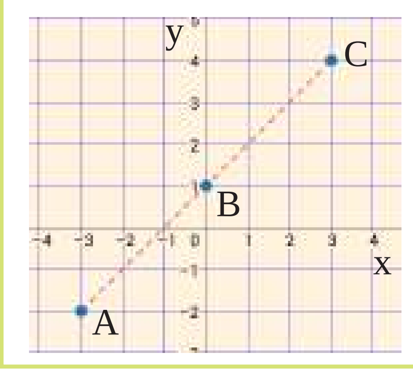
قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

بالتعويض بالنقطتين $AB = \sqrt{(0-3)^2 + (4-0)^2}$

بالتبسيط $AB = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\therefore$ المسافة بين محمد و مهند 5km

مثال (2) باستعمال قانون المسافة، أثبت أن النقط $A(-3,-2), B(0,1), C(3,4)$ تقع على استقامة واحدة.



قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

بالتعويض من النقاط A,B,C

$$AB = \sqrt{(0+3)^2 + (1+2)^2}$$
$$BC = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2}$$
$$AC = \sqrt{(3+3)^2 + (4+2)^2}$$

بالتبسيط

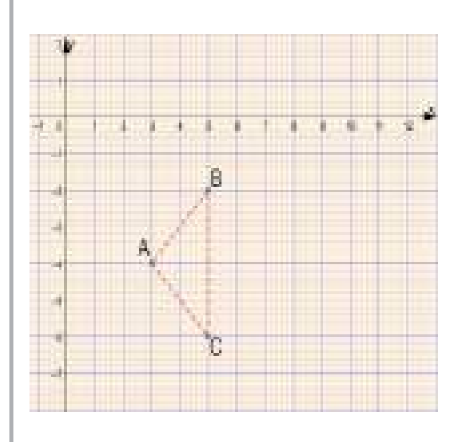
$$AB = \sqrt{9+9},\ BC = \sqrt{9+9},\ AC = \sqrt{36+36}$$
$$AB = \sqrt{18},\ BC = \sqrt{18},\ AC = \sqrt{72}$$
$$= 3\sqrt{2},\quad = 3\sqrt{2},\quad = 6\sqrt{2}$$

الكل يساوي مجموع الاجزاء $6\sqrt{2} = 3\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$

اي: $AC = AB + BC$

اذن النقط A,B,C تقع على استقامة واحدة.

مثال (3) بيِّن نوع المثلث الذي رؤوسه $A(3,-4), B(5,-2), C(5,-6)$ من حيث الاضلاع. و هل المثلث قائم الزاوية؟



قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

بالتعويض من A,B,C

$$AB = \sqrt{(5-3)^2 + (-2+4)^2}$$
$$BC = \sqrt{(5-5)^2 + (-6+2)^2}$$
$$AC = \sqrt{(5-3)^2 + (-6+4)^2}$$

بالتبسيط

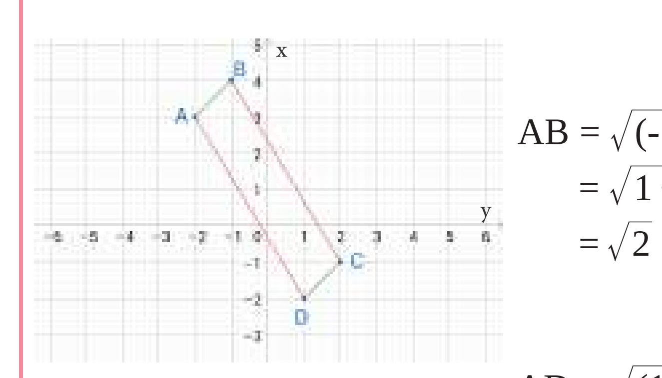
$$AB = \sqrt{4+4},\ BC = \sqrt{0+16},\ AC = \sqrt{4+4}$$
$$AB = \sqrt{8},\ BC = 4,\ AC = \sqrt{8}$$
$$= 2\sqrt{2},\quad = 4,\quad = 2\sqrt{2}$$

$\because$ AB=AC، $\therefore$ المثلث متساوي الساقين

$$(4)^2 = (\sqrt{8})^2 + (\sqrt{8})^2$$
$$(4)^2 = 8 + 8$$

عكس مبرهنة فيثاغورس، $\therefore$ المثلث قائم الزاوية في A.

مثال (4) بين باستعمال قانون المسافة ان النقط $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع.



قانون المسافة بين نقطتين $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$$AB = \sqrt{(-1+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$
$$DC = \sqrt{(1-2)^2 + (-2+1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$\therefore AB = DC$

بنفس الطريقة

$$AD = \sqrt{(1+2)^2 + (-2-3)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$
$$BC = \sqrt{(2+1)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

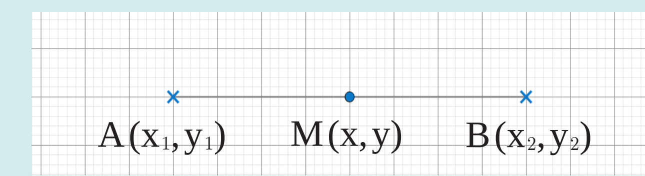
$\therefore AD = BC$

لذا الشكل ABCD متوازي اضلاع (خواص متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويين)

[4-5-2] قانون نقطة المنتصف The Midpoint Formula

نقطة المنتصف: هي النقطة الواقعة على بعدين متساويين عن طرفي قطعة مستقيم و تنتمي له.
احداثيات نقطة المنتصف

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$



مثال (5) جد إحداثي نقطة المنتصف للقطعة المستقيمة الواصلة بين $A(3,-8), B(3,6)$

قانون نقطة المنتصف
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

بالتعويض بالنقطتين
$$= \left(\frac{3+3}{2}, \frac{-8+6}{2}\right)$$

بالتبسيط
$$= \left(\frac{6}{2}, \frac{-2}{2}\right) = (3,-1)$$

$\therefore (3,-1)$ نقطة منتصف $\overline{AB}$

مثال (6) اذا كانت $M(1,-3)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $A(-1,-2)$ جد احداثي النقطة B.

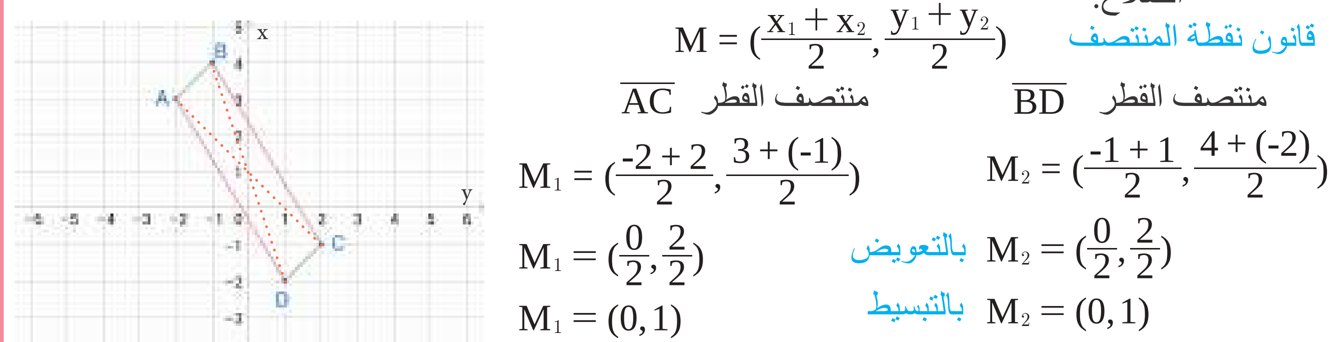
قانون نقطة المنتصف
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

نفرض $B(x_2, y_2)$ وبالتعويض بالنقاط
$$(1,-3) = \left(\frac{-1 + x_2}{2}, \frac{-2 + y_2}{2}\right)$$

الضرب التبادلي و التبسيط
$$1 = \frac{-1 + x_2}{2} \Rightarrow -1 + x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 3$$
$$-3 = \frac{-2 + y_2}{2} \Rightarrow -2 + y_2 = -6 \Rightarrow y_2 = -4$$

احداثيات B هي: $B(3,-4)$

مثال (7) بيِّن باستعمال قانون المنتصف ان النقط $A(-2,3), B(-1,4), C(2,-1), D(1,-2)$ رؤوس متوازي اضلاع.



قانون نقطة المنتصف
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

منتصف القطر $\overline{BD}$
$$M_2 = \left(\frac{-1+1}{2}, \frac{4+(-2)}{2}\right)$$

بالتعويض
$$M_2 = \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right)$$

بالتبسيط
$$M_2 = (0,1)$$

منتصف القطر $\overline{AC}$
$$M_1 = \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right)$$
$$M_1 = \left(\frac{0}{2}, \frac{2}{2}\right)$$
$$M_1 = (0,1)$$

$\because M_1 = M_2$ $\therefore$ الشكل ABCD متوازي اضلاع (خواص متوازي الاضلاع قطراه احدهما ينصف الآخر)

مثال (8) $A(3,1), B(5,3), C(5,-1)$ رؤوس مثلث حيث AB=AC النقطة M منتصف $\overline{BC}$ جد طول $\overline{AM}$.

قانون نقطة المنتصف، التبسيط
$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{5+5}{2}, \frac{3+(-1)}{2}\right) = (5,1)$$

قانون المسافة بين نقطتين
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

بالتعويض
$$= \sqrt{(5-3)^2 + (1-1)^2}$$

بالتبسيط
$$= \sqrt{4} = 2$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

السؤال 1 مشابه للمثال 1
السؤال 2 مشابه للمثال 4
السؤال 3 مشابه للمثال 2
السؤال 4 مشابه للمثال 3
السؤال 5 مشابه للمثالين 4,6
السؤال 6 مشابه للمثال 7

1 **أوجد المسافة بين كلِّ نقطتين فيما يأتي:**

$iii)(-1,-2)(3,-4)$ $\quad ii)(-3,-1),(1,-4)$ $\quad i)(0,0),(3,8)$

2 أوجد نقطة المنتصف للافرع $(i),(ii),(iii)$ في سؤال 1.

3 باستعمال قانون المسافة بين نقطتين، أثبت ان النقط $A(-2,-1),B(-1,0),C(4,5)$ على استقامة واحدة.

4 بيِّن نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2,4),B(-4,2),C(-1,-2)$ من حيث الاضلاع.
و هل المثلث قائم الزاوية؟

5 **بيِّن ان النقط الآتية:** $A(4,0),B(6,-6),C(-8,0),D(-10,6)$ **رؤوس متوازي الاضلاع.**
i) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين. $\quad$ ii) باستعمال قانون نقطة المنتصف.

6 اذا كانت $M(-2,0)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $A(4,0)$ فجد أحداثيي النقطة B.

تدربْ وحلّ التمريناتِ

7 **أوجد المسافة بين كلِّ نقطتين فيما يأتي:**

$iii)(-2,4)(-6,-2)$ $\quad ii)(6,-9),(0,2)$ $\quad i)(8,1),(-4,3)$

8 أوجد نقطة المنتصف للافرع $(i),(ii),(iii)$ في السؤال 7.

9 باستعمال قانون المسافة بين نقطتين، أثبت ان النقط $A(1,-3),B(3,-4),C(-1,-2)$ على استقامة واحدة.

10 بيِّن نوع المثلث الذي رؤوسه $A(2,-1),B(2,1),C(-1,-1)$ من حيث الاضلاع. و هل المثلث قائم الزاوية؟

11 **بيِّن ان النقط الآتية:** $A(-3,5),B(2,7),C(1,9),D(-4,7)$ **رؤوس متوازي الاضلاع.**
i) باستعمال قانون المسافة بين نقطتين. $\quad$ ii) باستعمال قانون نقطة المنتصف.

12 اذا كانت $M(4,-2)$ منتصف $\overline{AB}$ وكانت $B(5,1)$ فجد احداثيي النقطة A.

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

13 **هندسة :** ABC مثلث رؤوسه $A(6,4),B(-2,6),C(0,-4)$ ، تحقق من ان طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين فيه يساوي نصف طول الضلع الثالث.

14 **تحديد موقع :** موقع بيت محمود عند النقطة $(-4,0)$ وموقع مدرسته عند النقطة $(0,-3)$ ما المسافة التي يقطعها محمود عند ذهابه الى المدرسة، علماً ان طول ضلع كلِّ مربع في المستوي الاحداثي يمثل كيلومتراً واحداً؟

فَكِّرْ

15 **تحدٍّ:** دائرة طرفا احد اقطارها النقطتان $A(-1,1),B(5,1)$ جد: i) احداثيات مركزها ii) مساحتها.

16 **اكتشف الخطأ:** وجدت شهد إحداثيات نقطة منتصف القطعة المستقيمة التي طرفيها $(6,1),(8,3)$ فكتبتها $(\frac{8-6}{2},\frac{3-1}{2})=(1,1)$ اكتشف خطأ شهد وصحِّحه.

أُكتبْ

علاقة قانون نقطة المنتصف بإيجاد الوسط الحسابي.

الدرسُ]4-6[النسب المثلثية Trigonometric Ratios



فكرةُ الدرس

- تعرف الى النسب المثلثية الاساسية.
- النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- إيجاد قيم عبارات تتضمن زوايا الخاصة.

المفردات

- النسب المثلثية

sin,cos,tan,sec,csc,cot

- الزوايا الخاصة

$60^\circ, 45^\circ, 30^\circ, 90^\circ, 0^\circ$

تعلم

وقف مساح على بعد d متر من بناية، ومن خلال جهازه نظر اعلى البناية بزاوية معينة.

- كيف تساعده النسب المثلثية في ايجاد ارتفاع البناية؟



]4-6-1[النسب المثلثية $(\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta)$ Trigonometric Ratios $(\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta)$

تعرفت سابقاً الى عناصر المثلث حيث يتكون من ثلاث زوايا وثلاثه اضلاع. ويسمى المثلث بزواياه (حاد الزوايا، منفرج الزاوية، قائم الزاوية) او بأضلاعه (متساوي الاضلاع، متساوي الساقين، مختلف الاضلاع).

حساب المثلثات: هي دراسة العلاقة بين زوايا المثلث واضلاعه

النسبة المثلثية: هي النسبة التي تقارن بين طولي ضلعين من اضلاع المثلث القائم الزاوية.

النسبة الاساسية هي: الجيب sin، الجيب تمام cos، الظل tan.

جيب الزاوية θ (يرمز له $\sin\theta$): هي النسبة بين الضلع المقابل للزاوية θ و الوتر: $\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

جيب تمام الزاوية θ (يرمز له $\cos\theta$): هي النسبة بين الضلع المجاور للزاوية θ والوتر: $\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

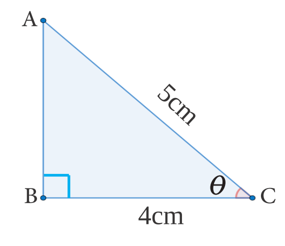
ظل الزاوية θ (يرمز له $\tan\theta$): هي النسبة بين الضلع المقابل للزاوية θ والضلع المجاور لها: $\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

لإيجاد النسب المثلثية (sin,cos,tan) نتبع ما يأتي:

1) رسم تخطيطي لمثلث قائم الزاوية، وتثبت عليه المعطيات.
2) نستعمل مبرهنة فيثاغورس لايجاد الضلع المجهول.
3) نستعمل النسب المثلثية لايجاد المطلوب.



مثال (1) من الشكل المجاور، جد قيم النسب المثلثية الثلاث للزاوية θ .



أستعمل مبرهنة فيثاغورس لأجد طول الضلع AB (المقابل)

مبرهنة فيثاغورس $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

بالتعويض والتبسيط $(5)^2 = (AB)^2 + (4)^2$

بجذر الطرفين (اشارة موجبة لأنه طول) $(AB)^2 = 25 - 16 = 9$

$AB = 3$

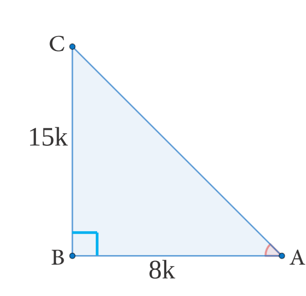
استعمال النسب المثلثية ثم التعويض

$\tan\theta = \frac{\theta \text{ مقابل الزاوية}}{\theta \text{ مجاور الزاوية}} = \frac{3}{4}$

$\sin\theta = \frac{\theta \text{ مقابل الزاوية}}{\text{الوتر}} = \frac{3}{5}$

$\cos\theta = \frac{\theta \text{ مجاور الزاوية}}{\text{الوتر}} = \frac{4}{5}$

مثال (2) المثلث ABC القائم الزاوية في B اذا كانت $\tan A = \frac{15}{8}$ جد: $i)\sin A \quad ii)\cos A$



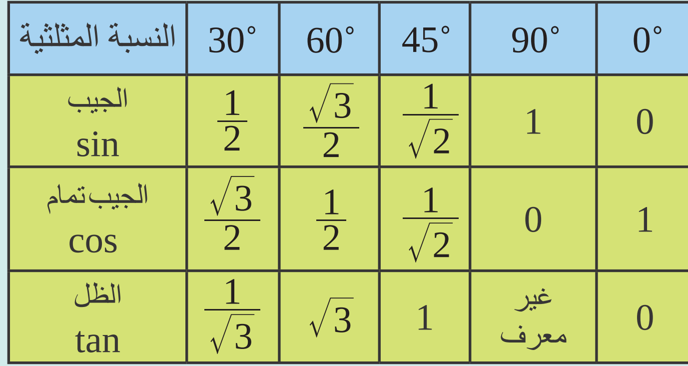
بضرب البسط والمقام في الثابت k حيث k اكبر من 0
$$\tan A = \frac{15k}{8k}$$
قانون الظل
$$\tan A = \frac{BC}{BA}$$
بالمقارنة
$$\therefore BC = 15k, AB = 8k$$
مبرهنة فيثاغورس
$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$
بالتعويض
$$= (8k)^2 + (15k)^2$$
بالتبسيط
$$= 64k^2 + 255k^2$$
نجذر الطرفين
$$(AC)^2 = 289k^2 \Rightarrow \therefore AC = 17k$$

$$i)\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17} \quad ii)\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{8k}{17k} = \frac{8}{17}$$

[2-6-4] النسب المثلثية للزوايا الخاصة The Trigonometric Ratios for Spicial Angles

الجدول المجاور يبيِّن قيم النسب المثلثية للزوايا الخاصة:

النسبة المثلثية	30°	60°	45°	90°	0°
الجيب sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	0
الجيب تمام cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	1
الظل tan	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	1	غير معرف	0





مثال (3) أثبت ان: $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ = \sin 90^\circ$

من الجدول نجد:
$$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \sin 90^\circ = 1$$

بالتعويض في الطرف الايمن R.H.S والطرف الايسر L.H.S

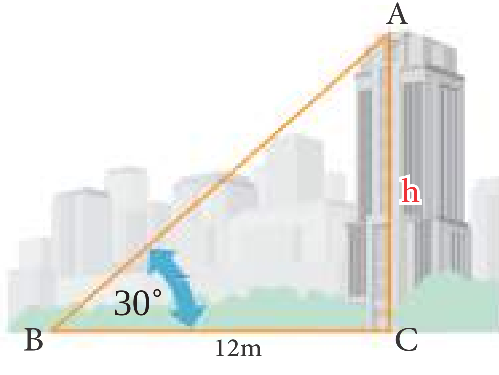
R.H.S: $\sin 90^\circ = 1$

L.H.S: $(\frac{\sqrt{3}}{2})(\frac{\sqrt{3}}{2}) + (\frac{1}{2})(\frac{1}{2})$

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$\therefore$ L.H.S = R.H.S

مثال (4) وقف رجل امام بناية وعلى بعد 12m من قاعدتها ونظر الى قمة البناية بزاوية مقدارها 30° جد ارتفاع البناية.



النسبة المثلثية التي تربط بين ارتفاع البناية h وبعد الرجل عن قاعدتها هي نسبة الظل.

قانون الظل
$$\tan 30^\circ = \frac{h}{12}$$
التعويض
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{12}$$
الضرب التبادلي
$$\sqrt{3}h = 12$$
التبسيط
$$h = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}m$$

ارتفاع البناية هو: $4\sqrt{3}m$

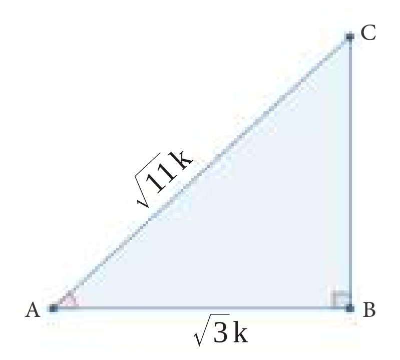
[4-6-3] علاقات النسب المثلثية Relations of Trigonometric Ratios

سنقتصر في هذا البند على مقلوب النسب المثلثية sin,cos,tan و كما ملاحظ في الجدول الآتي:

النسبة المثلثية	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
مقلوبها	$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ قاطع تمام	$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ قاطع	$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$ ظل تمام

مثال (5) مثلث قائم الزاوية في B، اذا كانت $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}$ فجد: i) sec A ii) csc A iii) cot A

$$\cos A = \frac{\sqrt{3}\,k}{\sqrt{11}\,k} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = \sqrt{3}\,k, AC = \sqrt{11}\,k$$



$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$ مبرهنة فيثاغورس

$(\sqrt{11}\,k)^2 = (\sqrt{3}\,k)^2 + (BC)^2$ بالتعويض

$11k^2 = 3k^2 + (BC)^2$ بالتبسيط

$(BC)^2 = 8k^2$ نجذر الطرفين

$\therefore BC = \sqrt{8}\,k$

مقلوب النسب المثلثية الاساسية

$$i)\cos A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{3}} \qquad ii)\sin A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{11}} \Rightarrow \csc A = \frac{1}{\sin A} = \frac{\sqrt{11}}{\sqrt{8}}$$

$$iii)\tan A = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}$$

مثال (6) جد القيمة العددية للمقدار الآتي: $(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2\csc 90^\circ$

من الجداول نجد قيم النسب المثلثية الخاصة ومقلوبات النسب المثلثية الاساسية

$$\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec 45^\circ = \frac{1}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}, \cot 30^\circ = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$$

$$\csc 90^\circ = \frac{1}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{1} = 1$$

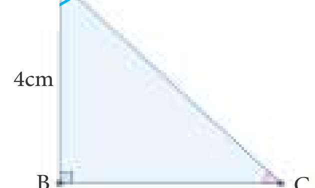
المقدار المعطى بالتعويض و التبسيط

$$(\sin 45^\circ)(\sec 45^\circ) - (\tan 60^\circ)(\cot 30^\circ) + 2\csc 90^\circ$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}})(\sqrt{2}) - (\sqrt{3})(\sqrt{3}) + 2(1) \Rightarrow 1 - 3 + 2 = 0$$

$\therefore$ الناتج العددي للمقداريساوي 0

تأكَّدْ من فهمِكَ



1 من الشكل المجاور، جد النسب المثلثية الآتية:

i) sin A ii) cos C iii) cot C iv) sec A

السؤال (1) مشابه للامثلة (1,2,5):

2 في المثلث ABC القائم الزاوية في B، اذا كانت $\cot A = \sqrt{3}$ جد:

السؤال (2) مشابه للمثالين 2,5

$i)\tan A \quad ii)\sin A \quad iii)\csc A \quad iv)\sec A \quad v)\cos A$

3 أثبت ما يأتي:

السؤال (3) مشابه للمثالين 6,3

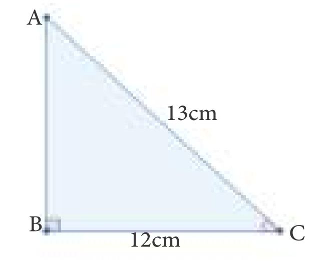
$i)(\cos30^\circ - \csc45^\circ)(\sin60^\circ + \sec45^\circ) = -\frac{5}{4}$, $ii) 2\sin30^\circ\sec30^\circ = \csc60^\circ$

$iii)(\cos45^\circ - \csc45^\circ)(\tan45^\circ)(\csc90^\circ) = -\cos45^\circ$, $iv)\sqrt{\frac{1-\cos60^\circ}{2}} = \sin30^\circ$

4 طائرة ورقية ارتفاعها $3\sqrt{3}$m عن سطح الارض، اذا كان الخيط المتصل بها يصنع زاوية مقدارها 60° مع الارض. جد طول الخيط.

السؤال (4) مشابه للمثال 4

تدربْ وحلّ التمريناتِ



5 من الشكل المجاور، جد النسب المثلثية الآتية:

$i)\cot A \quad ii)\cot C \quad iii)\sec C \quad iv)\csc A$

6 في المثلث ABC القائم الزاوية في B، اذا كانت $\sec A = \sqrt{2}$ جد:

$i)\sin A \quad ii)\cot C \quad iii)\csc A \quad iv)\cos C$

7 أثبت ما يأتي:

$i)\cos60^\circ\csc60^\circ + \sin60^\circ\sec60^\circ) = \frac{4}{\sqrt{3}}$ $\quad ii)\sin45^\circ\sec45^\circ + \csc45^\circ\sin45^\circ = 2,$

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

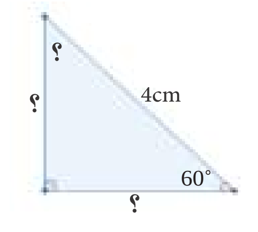
8 **رياضة:** عمل جهاز رياضي مائل لتمرين السير بزاوية قدرها 30° ، فإذا كان طرف الجهاز يرتفع 1.5m عن سطح الارض . فما طول حزام الجهاز؟

9 **تزلج على الجليد:** في موقع للتزلج على احد التلال، كان ارتفاع التلة الرئيسية 500m وزاوية ميلها عن مستوى الارض 60° . ماطول سطح التزلج؟

10 **سلم اطفاء الحرائق:** سلم اطفاء حريق طوله 20m يرتكز احد طرفيه على بناية والطرف الآخر على ارض افقية بزاوية 45° ، جد ارتفاع نقطة ارتكاز طرف السلم على البناية.

11 **حديقة:** وقفت بنان على بعد 25m من قاعدة شجرة ارتفاعها 25m. فما قياس الزاوية التي تشكلها مع قمة الشجرة؟

فَكِّرْ



12 **تحد:** في الشكل المجاور، جد القيم المؤشرة (؟) باستعمال النسب المثلثية.

13 **مسألة مفتوحة:** ABC مثلث قائم الزاوية في B، $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ كيف تجد قيمة الزاوية C؟

14 **تبرير:** اذا كان جيب زاوية وجيب تمامها متساويين في مثلث قائم الزاوية. ما نوع المثلث من حيث اطوال اضلاعه؟.

أُكتبْ

مسألة تستعمل فيها نسبة الجيب لايجاد طول ضلع مجهول في مثلث قائم الزاوية. ثم حلها.

اختبار الفصل

Chapter Test

1 **مثِّل المعادلات التالية في المستوي الاحداثي**

i) $2x - 4y = 8$ ii) $y = 2$ iii) $x = 2$ iv) $y = x^2 - 1$

2 جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين: $A(-2, -3), B(2, 3)$

3 جد المقطع السيني والصادي للمعادلة الآتية: $y - x = 4$

4 **جد معادلة المستقيم لكل مما يأتي:**

i) يمر بالنقطتين $(3, -2), (1, 5)$

ii) ميله $\frac{3}{2}$ ومقطعه الصادي يساوي 5-.

iii) ميله $-\frac{1}{5}$ ومقطعه السيني يساوي 3.

5 استعمل معادلة الميل والنقطة لتحديد ميل المستقيم واحدى نقاطه $2y - 3x = 8$

6 **باستعمال الميل بين ما يأتي:**

i) النقاط: $A(3, 2), B(0, -1), D(1, 0)$ على استقامة واحدة.

ii) النقاط التالية رؤوس لمتوازي الاضلاع

$A(4, -1), B(2, 2), C(-2, 4), D(0, 1)$

iii) المستقيم المار بالنقطتين $A(3, 1), B(4, -1)$ عمودي على المستقيم المار بالنقطتين $C(4, -1), D(0, -3)$

7 جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (0,3) والموازي للمستقيم الذي ميله $\frac{-2}{3}$.

8 باستعمال قانون المسافة بين نقطتين، اثبت $(i), (ii)$ في السؤال 6.

9 باستعمال قانون نقطة المنتصف، اثبت الفرع (ii) في السؤال 6.

10 في المثلث ABC القائم الزاوية في B، اذا كانت $\sin A = \frac{1}{2}$ جد:

i) $\cos A$ ii) $\tan A$ iii) $\cot C$ iv) $\sec A$

الفصلُ 5

الهندسة والقياس

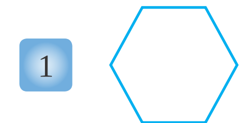
Geometric and Measurement

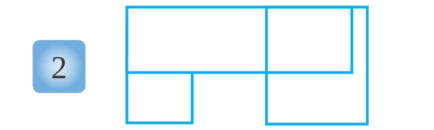


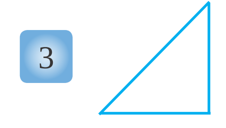
الاشكال المثلثة تعطي البناء قوة ومتانة حيث تميزت الكثير من اعمال الراحلة المهندسة العراقية زها حديد باستعمالها الاشكال الهندسية المثلثة، ومنها جسر في ابو ظبي بلغ ارتفاع راس المثلث 60m فوق مستوى سطح البحر.

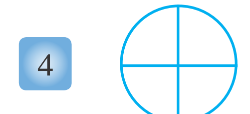
Pretest الاختبارُ القبليّ

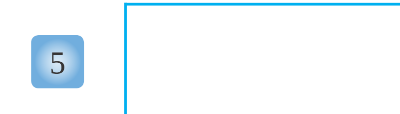
حدد ما اذا كان الشكل مضلعاً واذا كان كذلك فهل هو مضلع منتظم او مضلع غيرمنتظم .

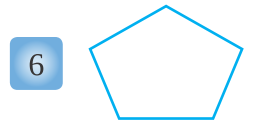
1 

2 

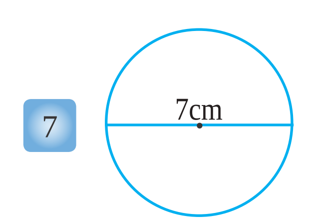
3 

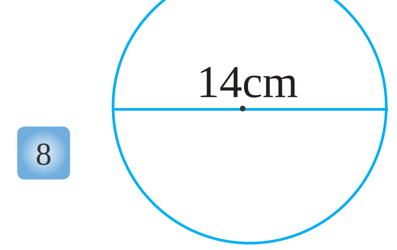
4 

5 

6 

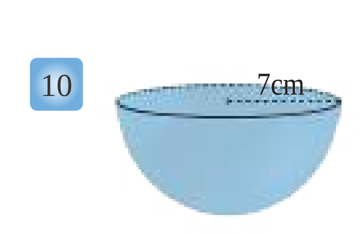
جد مساحة كل دائرة ومحيطها مما يأتي:

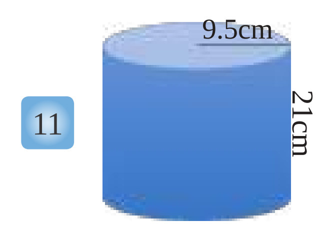
7 

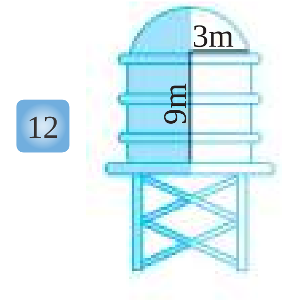
8 

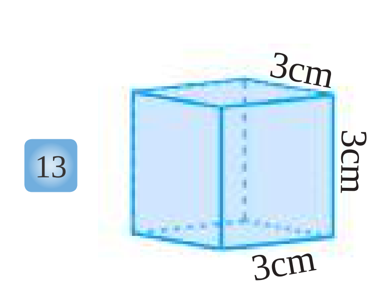
9 

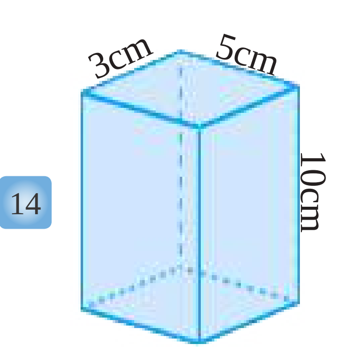
جد المساحة السطحية والحجم لكلّ مما يأتي:

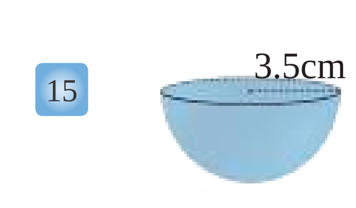
10 

11 

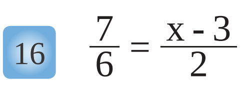
12 

13 

14 

15 

جد قيمة x في كل مما يأتي :

16  $\frac{7}{6} = \frac{x - 3}{2}$

17 $\frac{7}{x} = \frac{1}{2}$

18 $\frac{3}{16} = \frac{x}{4}$

جد قياس الزاوية المركزية ومجموع قياس الزوايا الداخلية والخارجية لكل مما يأتي:

19 خماسي منتظم

20 ثماني منتظم

21 سداسي منتظم

22 شركة تجارية تضم 20 موظفاً، وكانت نسبة الذكور الى الاناث $\frac{3}{2}$ ، كم عدد الموظفين من الاناث؟ وكم عددهم من الذكور؟

23 مثلث متساوي الاضلاع طول كل ضلع فيه يساوي $(2x - 1)$cm ومحيط المثلث يساوي 57cm، جد قيمة x و جد طول كل ضلع فيه.

الدرسُ [5-1]

المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

Polygons and Polyhedrons (Pyramid and Cone)

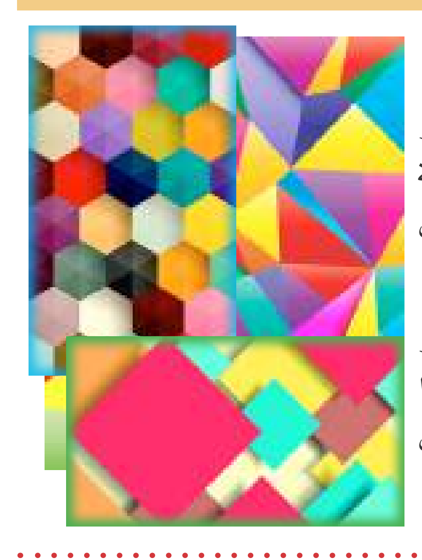
فكرةُ الدرس

- اجد محيط ومساحة المضلعات المنتظمة .
- اجد الحجم والمساحة الكلية لكل من الهرم والمخروط.

المفردات

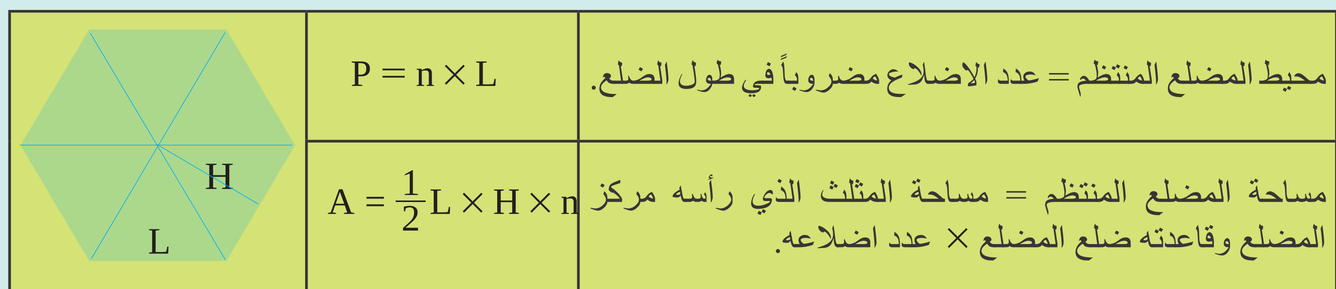
- العامد
- الارتفاع الجانبي
- المخروط
- الهرم

تعلم



تعرفت سابقاً الى المضلعات المنتظمة وغير المنتظمة وكيفية ايجاد الزوايا الداخلية والخارجية للمضلع المنتظم وكذلك تعرفت على كيفية ايجاد الزاوية المركزية للمضلع. واستطعت التمييز بين المضلع المقعر والمضلع المحدب وسوف تتمكن في هذا الدرس من ايجاد مساحة ومحيط المضلعات المنتظمة .

[5-1-1] المضلعات المنتظمة Regular Polygons

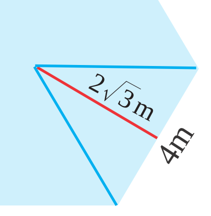


محيط المضلع المنتظم = عدد الاضلاع مضروباً في طول الضلع.	$P = n \times L$	
مساحة المضلع المنتظم = مساحة المثلث الذي رأسه مركز المضلع وقاعدته ضلع المضلع × عدد اضلاعه.	$A = \frac{1}{2} L \times H \times n$	H L

اذا عرفت ان طول الضلع L و العامد H (هو العمود النازل من مركز المضلع على احد اضلاع المضلع).

يمكن حساب مساحة المثلث كما يأتي: مساحة المثلث $= \frac{1}{2}$ القاعدة × الارتفاع (العامد)، $A = \frac{1}{2} L \times H$

مثال (1) جد محيط ومساحة الشكل السداسي المنتظم، طول ضلعه 4m وطول العامد $2\sqrt{3}\,m$.



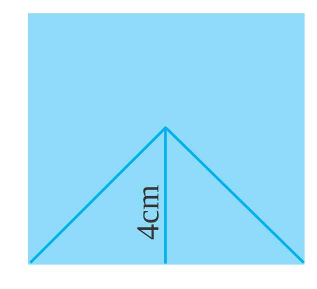
باستعمال قانون محيط المضلع $P = n \times L$

محيط المضلع $P = 6 \times 4 = 24m$

باستعمال قانون مساحة المضلع $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$

بالتعويض والتبسيط $= \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \times 6 = 24\sqrt{3}\,m^2$

مثال (2) جد مساحة المربع الذي طول العامد فيه 4cm.



طريقة (1): باستعمال قانون مساحة المضلع المنتظم $A = \frac{1}{2} L \times H \times n$

طول ضلع المربع يساوي ضعف طول العامد $L = 4 \times 2 = 8cm$

$A = \frac{1}{2} \times 8 \times 4 \times 4 = 64cm^2$

طريقة (2): باستعمال قانون مساحة المربع (طول الضلع × نفسه) $A = L \times L$

$A = 8 \times 8 = 64cm^2$

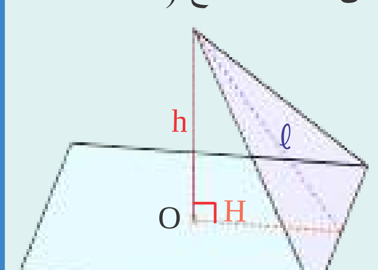
الهرم: هو مجسّم له في الاقل ثلاثة اوجه مثلثة الشكل وله قاعدة واحدة تعبر عن شكل مضلع (شكل القاعدة يحدد اسم الهرم).

h = الارتفاع

H = العامد

ℓ = الارتفاع الجانبي

$$\ell^2 = h^2 + H^2$$



المخروط: هو مجسّم له قاعدة واحدة فقط عبارة عن دائرة وله رأس واحد.

ℓ = الارتفاع الجانبي (مولد المخروط)

h = الارتفاع

r = نصف القطر

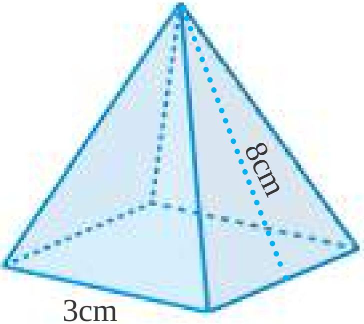
$$\ell^2 = h^2 + r^2$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة.

قانون المساحة للهرم المنتظم والمخروط الدائري القائم		
	الهرم المنتظم	المخروط القائم
المساحة الجانبية	$LA = \frac{1}{2}p \times \ell$ p محيط القاعدة	$LA = \pi r \times \ell$
المساحة الكلية	$TA = \frac{1}{2}p \times \ell + b$ b مساحة القاعدة	$TA = \pi r \times \ell + \pi r^2$

قانون الحجم في الهرم والمخروط	
حجم الهرم	$V = \frac{1}{3}b \times h$
حجم المخروط	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$

مثال (3) جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لهرم منتظم ارتفاعه الجانبي 8cm وقاعدته مربعة طول ضلعها 3cm .



المساحة الجانبية $LA = \frac{1}{2}p \times \ell$

محيط القاعدة = محيط المربع = 4×3 $\quad LA = \frac{1}{2} \times 12 \times 8$

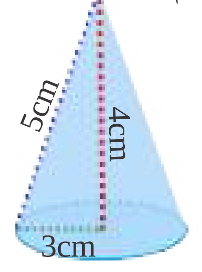
$LA = 48cm^2$

المساحة الكلية $TA = \frac{1}{2}p \times \ell + b$

مساحة القاعدة = مساحة المربع = 3×3 $\quad TA = 48 + 9 = 57cm^2$

المساحة الكلية $TA = 57cm^2$

مثال (4) **استخدم الشكل المجاور لإيجاد:** i) المساحة الجانبية ii) المساحة الكلية iii) الحجم.



المساحة الجانبية للمخروط $i)\ LA = \pi r \times \ell$

بالتعويض والتبسيط $= \pi \times 3 \times 5 = 15\pi\ cm^2$

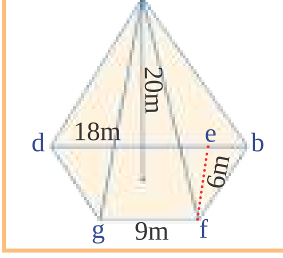
المساحة الكلية للمخروط $ii)\ TA = \pi r \times \ell + \pi r^2$

بالتعويض والتبسيط $= 15\pi + 9\pi = 24\pi cm^2$

حجم المخروط $iii)\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 \times h$

بالتعويض والتبسيط $= \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 12\pi\ cm^3$

مثال (5)  جد حجم الهرم المجاور.

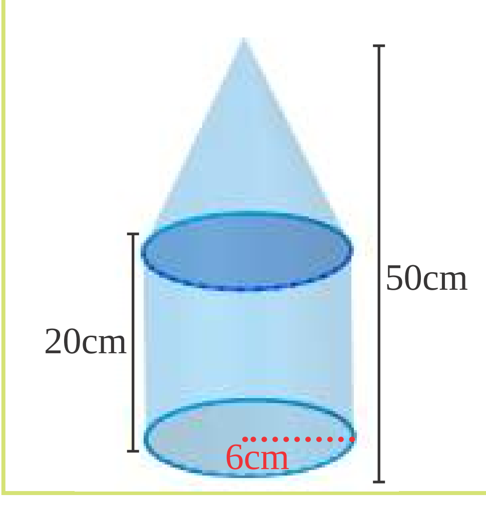


مساحة شبه المنحرف $b = \frac{1}{2}(gf + bd) \times fe = \frac{1}{2}(9 + 18) \times 6 = 81m^2$

حجم الهرم $V = \frac{1}{3}b \times h = \frac{1}{3} \times 81 \times 20 = 540m^3$

مثال (6) جد حجم المجسّم المركّب المجاور.

لايجاد حجم المجسم المركب نجد اولا حجم الاسطوانة وحجم المخروط وبعد ذلك نجمع الحجوم لنجد حجم المجسم المركب.



قانون حجم الاسطوانة $V_1 = \pi r^2 h \Rightarrow V_1 = 36\pi \times 20$

بالتعويض و التبسيط $V_1 = 720\pi \ cm^3$

قانون حجم المخروط $V_2 = \frac{1}{3} r^2 \pi \times h$

بالتعويض و التبسيط $V_2 = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 30 = 360\pi \ cm^3$

$V = V_1 + V_2$

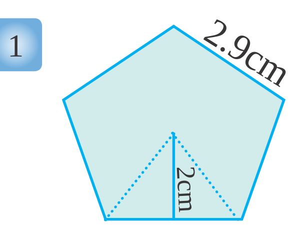
حجم المجسم المركب $V = 720\pi + 360\pi = 1080\pi \ cm^3$

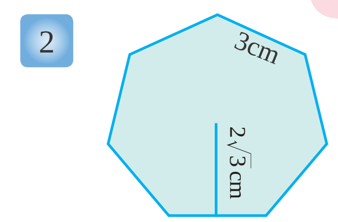
تأكَّدْ من فهمِكَ

جد محيط ومساحة كلّ مضلّع منتظم:



الاسئلة 1-2 مشابهة للمثال 1

1


2


3 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلية لكلّ مما يأتي:

i) مخروط دائري قائم: مساحة قاعدته $225\pi cm^2$ ، محيط قاعدته $30\pi cm$، ارتفاعه $20cm$، ارتفاعه الجانبي $25cm$

ii) هرم: مساحة قاعدته $54\sqrt{3} cm^2$، محيط قاعدته $36cm$، ارتفاعه $3\sqrt{6} cm$، ارتفاعه الجانبي $9cm$.

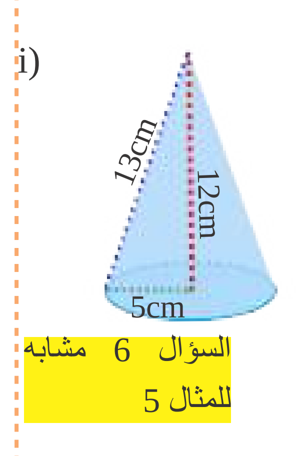
الاسئلة (3-4) مشابهة للمثالين 3,4

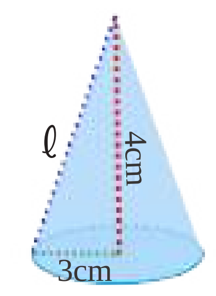
4 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلّية لكلّ مما يأتي:

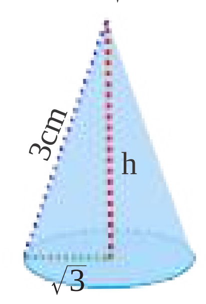
i) هرم قاعدته مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه $6cm$ وارتفاعه $\sqrt{33}$ cm وارتفاعه الجانبي $6cm$.

ii) هرم قاعدته مربعة طول ضلعها $12cm$ وارتفاعه $8cm$ وارتفاعه الجانبي $10cm$.

5 جد الحجم والمساحة الجانبية والكلّية مستعملاً الاشكال ادناه.

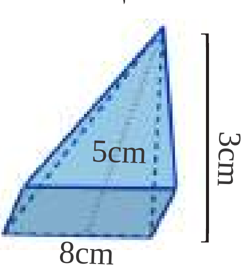
i)


ii)


iii)


السؤال 6 مشابه للمثال 5

6 جد الحجم والمساحة الجانبية والمساحة الكلية للشكل ادناه:



قاعدته مربعة

تدربْ وحلّ التمرينات

7 جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل طول ضلعها 8cm وارتفاعه الجانبي 7.2cm .

8 جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته المضلع الثماني المنتظم الذي قياس طول ضلعه 1.16cm وارتفاعه الجانبي 2cm.

9 جد المساحة الجانبية والمساحة الكلية لمخروط دائري قائم قطر قاعدته 35m وارتفاعه الجانبي 20m واكتب الجواب بدلالة π .

10 جد حجم هرم قاعدته مثلث منتظم وطول ضلعه 6m وارتفاعه 13m.

11 جد حجم الشكل المركب المجاور.

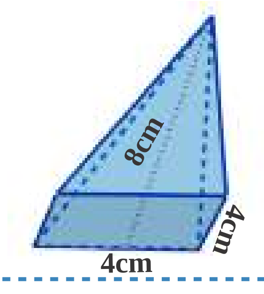


تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

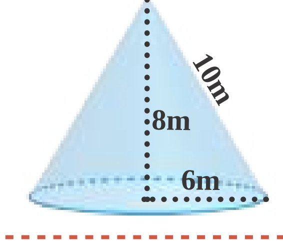
12 **علوم:** نموذج بركاني على شكل مخروط دائري قائم طول نصف قطر قاعدته 3cm، اذا كان حجم النموذج $203cm^3$ تقريباً، ما ارتفاعه؟



13 **بناء:** يبلغ ارتفاع برج العرب 321m ويمثل هرماً مقوساً , احسب المساحة التقريبية لقاعدته اذا كان حجم الهرم الذي يمثله $1904000m^3$.



14 **هندسة:** جد المساحة الجانبية للهرم الذي قاعدته مربعة الشكل والمبين بالشكل المجاور.



فَكِّرْ

15 **تحدٍّ:** مخروط واسطوانة لهما نفس القاعدة والحجم، قطر الاسطوانة 40cm وارتفاعها 7cm، ما المساحة الجانبية للمخروط؟

16 **اكتشف الخطأ :** اي الحلين خطأ ؟ وضح اجابتك .

10m
8m
6m

الحل الاول:

$V = \frac{1}{3} \times b \times h$

$V = \frac{1}{3} \times 36\pi \times 10 = 120\pi m^3$

الحل الثاني:

$V = \frac{1}{3} \times b \times h$

$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 6 \times \pi \times 8 = 96\pi m^3$

أُكتبْ

مسألة عن مضلع منتظم تسمح المعطيات فيه بأيجاد محيط المضلع ومساحته.

فكرةُ الدرس

- التعرف الى منصفات الزوايا والقطع المتوسطة للمثلث وكيفية تشابه مثلثين واستعمال التشابه في حل المسائل.

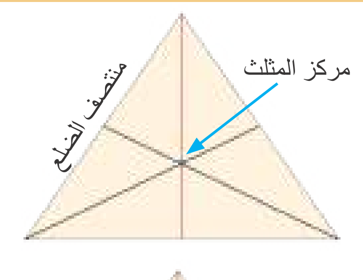
المفردات

- المثلثان المتشابهان.
- نسبة التشابه

تعلم

تعرفت سابقا الى خواص المثلث وستتعرف في هذا الدرس الى **القطعة المتوسطة في مثلث**: هي قطعة مستقيمة طرفاها احد رؤوس المثلث ونقطة منتصف الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة تتقاطع في نقطة واحدة تسمى نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث **(مركز المثلث)**.

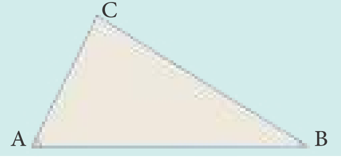
ارتفاع المثلث: هو العمود النازل من احد رؤوس المثلث على المستقيم الذي يحوي الضلع المقابل لذلك الرأس، ولكل مثلث ثلاثة ارتفاعات تتقاطع في نقطة واحدة تسمى **(ملتقى الارتفاعات)**.



[5-2-1] الاضلاع والزوايا في المثلث Sides and Angles in the Triangle

(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

مبرهنة: اذا تباين ضلعا مثلث تباينت الزاويتان المقابلتان لهما، فاكبرهما تقابل الضلع الاكبر وبالعكس. $BC > AC \Leftrightarrow m\angle A > m\angle B$



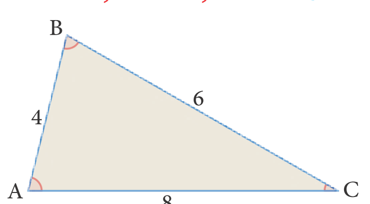
مثال (1)

i- في المثلث ادناه رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.

الضلع الاقصر $\overline{AB}$ اذن الزاوية الصغرى $\angle C$

الضلع الاطول $\overline{AC}$ اذن الزاوية الكبرى $\angle B$

الترتيب هو $m\angle C, m\angle A, m\angle B$



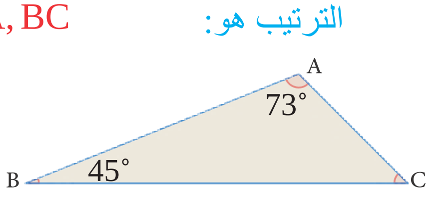
ii - في المثلث ادناه رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول واحسب قياس $\angle C$.

$m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$ مجموع زوايا المثلث

$m\angle C = 180^\circ - (73^\circ + 45^\circ) = 62^\circ$

$\therefore m\angle B < m\angle C < m\angle A$

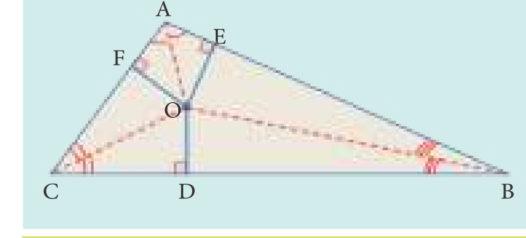
الترتيب هو: $\overline{AC}, \overline{BA}, \overline{BC}$



(مبرهنات من دون برهان) في كل مثلث:

مبرهنة: منصفات زوايا المثلث تتلاقى بنقطة واحدة تكون متساوية الابعاد عن اضلاعه. (والعكس صحيح).

اذا كان $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$ منصفات الزوايا A,B,C على الترتيب، تلتقي في نقطة O، فأن: OD=OE=OF



مثال (2) في المثلث المجاور جد قيمة x.

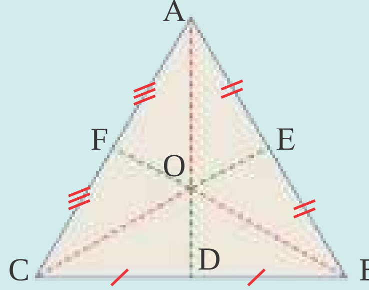
$\overline{BO}$ تنصف $\angle B$ ، $\overline{CO}$ تنصف $\angle C$ ، $\therefore$ O نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC

($\overline{AO}$ تنصف $\angle A$) $x = \frac{1}{2} m\angle A$ مبرهنة

مجموع زوايا المثلث $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180^\circ$

$m\angle A = 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ) = 50^\circ \Rightarrow \therefore x = 25^\circ$





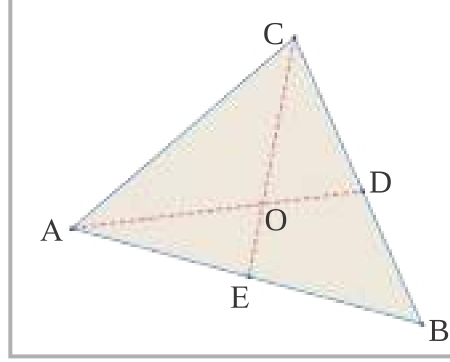
(مبرهنات من دون برهان) في كلّ مثلث:

مبرهنة: القطع المستقيمة المتوسطة للمثلث تتلاقى في نقطة واحدة تسمى مركز ثقل المثلث، تقسم كل منها بنسبة $\frac{2}{3}$ من جهة الرأس الى منتصف الضلع المقابل.

$$AO = \frac{2}{3}AD, BO = \frac{2}{3}BF, CO = \frac{2}{3}CE$$

$$OD = \frac{1}{3}AD, OF = \frac{1}{3}BF, OE = \frac{1}{3}CE$$

مثال (3) المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O، $CE = 9cm, AD = 6cm$ جد طول $\overline{AO}, \overline{OE}$.



$\overline{CE}$ قطعة متوسطة

$$OE = \frac{1}{3}CE$$

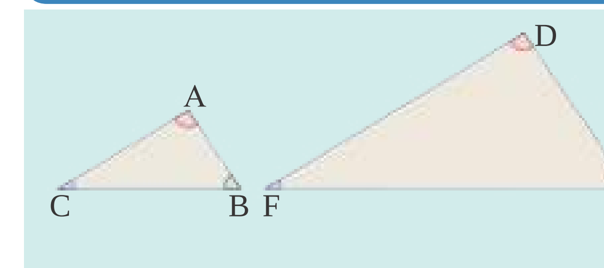
$$\therefore OE = \frac{1}{3} \times 9 = 3cm$$

كذلك $\overline{AD}$ قطعة متوسطة

$$\because OA = \frac{2}{3}AD$$

$$\therefore OA = \frac{2}{3} \times 6 = 4cm$$

[5-2-2] تشابه المثلثات Similarity of Triangles



المثلثان المتشابهان: هما مثلثان تتناسب اضلاعهما وتتطابق زواياهما ويرمز للتشابه بالرمز (~). المبرهنات من دون برهان

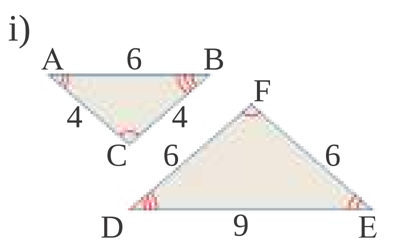
مبرهنة: اذا تطابقت زاويتان في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان.

$$m\angle A = m\angle D, m\angle C = m\angle F, \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF$$

مبرهنة: اذا تناسب ثلاثة اضلاع من مثلث مع ثلاثة اضلاع من مثلث آخر فان المثلثين يتشابهان.

مثال (4) بيِّن ما اذا كان المثلثين في الشكل المجاور متشابهان، واكتب نسبة التشابه.

i)



$$\frac{AB}{DE} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{EF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{FD} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

اذن المثلثان متشابهان

ii)

E 10 F, 6, 6, D; A, 4, 4, B 3 C

$$\frac{BC}{EF} = \frac{3}{10}$$

$$\frac{AB}{DF} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{EF} \neq \frac{AB}{DF}$$

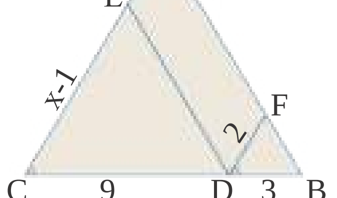
اذن المثلثان غير متشابهان

مبرهنة: اذا تناسب ضلعان في مثلث مع نظائرهما في مثلث آخر، وتطابقت الزاوية المحصورة بينهما مع نظيرتها فان المثلثين يتشابهان.

مثال (5) في الشكل المجاور: اذا كان



$\frac{CD}{DB} = \frac{EC}{FD}, m\angle C = m\angle FDB$ ، جد قيمة x.



بما ان المثلثين BFD,DEC متشابهان، اذن اضلاعهما المتناظرة متناسبة.

التناسب
$$\frac{x-1}{2} = \frac{9}{3}$$

الضرب التبادلي
$$3x - 3 = 18$$

التبسيط
$$3x = 21 \Rightarrow x = 7$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول

1

2

رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.

3

4

الاسئلة 1-4 مشابهة للمثال 1

5 في المثلث المجاور اذا كان : $\overline{AO}, \overline{BO}, \overline{CO}$ منصفات الزوايا A,B,C جد $m\angle x$.

السؤال 5 مشابه للمثال 2

6 ABC مثلث، O نقطة تقاطع مستقيماته المتوسطة، اذا كان: BO=12cm جد طول القطعة المستقيمة التي احد طرفيها النقطة B.

7 في المثلث ABC, O نقطة التقاء القطع المتوسطة، جد طول $\overline{AD}$ اذا علمت ان: $m\angle COB = 90^\circ, \overline{AO} \cap \overline{BC} = \{D\}, BC = 6cm$.

الاسئلة 6-7 مشابهة للمثال 3

ملاحظة: طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس الزاوية القائمة الى منتصف الوتر يساوي نصف طول الوتر.

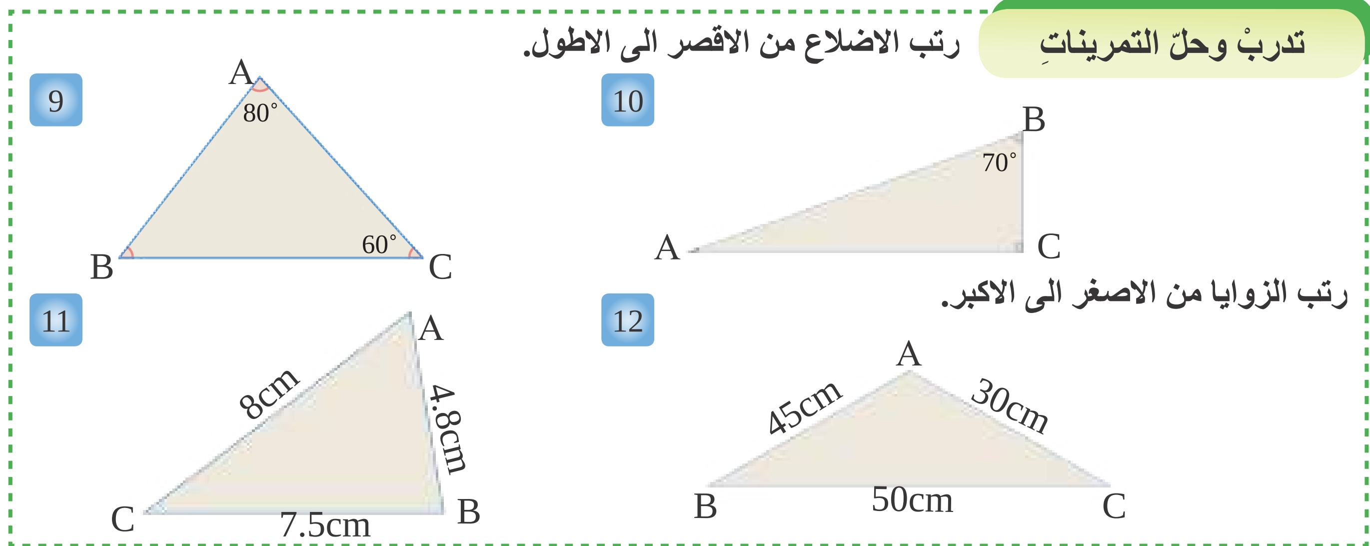
8 في الشكل المجاور:

i) بيِّن ان المثلثين ABC,BDE متشابهان.

ii) جد نسبة التشابه.

iii) جد قيمة x.

السؤال 8 مشابه للمثالين 4,5

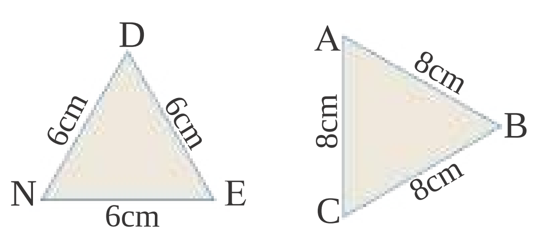


تدربْ وحلّ التمريناتِ

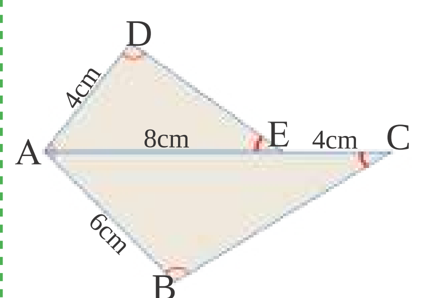
رتب الاضلاع من الاقصر الى الاطول.

رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر.

13 بيِّن ان المثلثين ABC, DEN في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه ثم سمّ ازواج الزوايا المتطابقة .

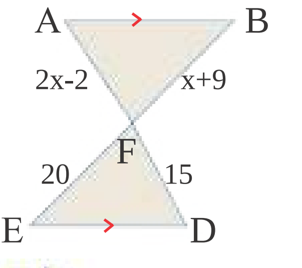


14 بيِّن ان المثلثين ABC, ADE في الشكل المجاور متشابهان واكتب نسبة التشابه.



تدربْ وحل مسائلَ حياتيةً

15 **هندسة :** اذا علمت ان $\triangle ABF \sim \triangle DEF$ وان $\overline{AB} \parallel \overline{ED}$ استعمل المعلومات في الشكل المجاور لتجد قيمة x.

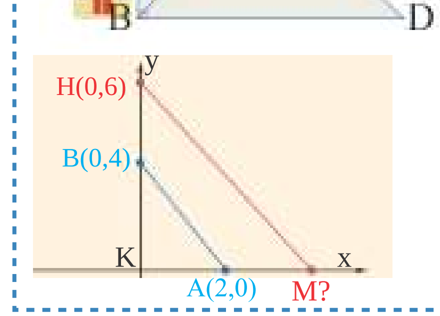


16 **بناية:** بناية ارتفاعها يمثل بضلع مثلث قائم الزاوية كما في الشكل المجاور. و BE هو ارتفاع للمثلث ABD برهن ان:

i. $\angle EBA \cong \angle D$

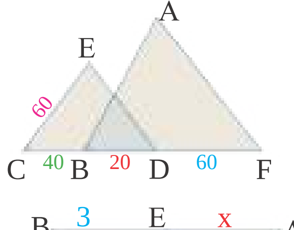
ii. $\triangle ABE \sim \triangle DBE$

17 في الشكل المجاور المثلثان KMH, KAB متشابهان، جد احداثيي M. ونسبة التشابه.



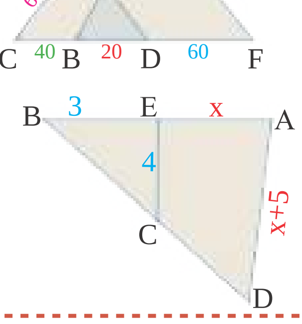
فَكِّرْ

18 **اكتشف :** ما طول $\overline{AB}$ في الرسم المجاور؟ علماً ان $\triangle ECD \sim \triangle ABF$.



19 **تحدٍ:** (2, 5, 10) و (6, 15, x) هي اطوال اضلاع متناظرة في مثلثين متشابهين، ما قيمة x ؟

20 **حس عددي:** جد قيمة x في الشكل المجاور. اذا كان المثلثان ABD,EBC متشابهين. وان: $\overline{EC} \parallel \overline{AD}$



21 **مسألة مفتوحة:** اشرح لماذا تحتاج قياسات الزوايا للتأكد من تشابه المثلثات، اعط مثلاً على ذلك.

أكتب

مسألة عن مثلثين متساويي الساقين تتطابق فيهما زاويتا الرأس وجد نسبة التشابه.

الدرسُ]5-3[التناسب والقياس في المثلثات
Proportion and Measure in Triangles

فكرةُ الدرس

- استعمل الاجزاء المتناسبة في المثلثات لنبرهن توازي مستقيمين او اكثر.
- استعمل التناسب لاجد قياسات مجهولة.
- استعمل التناسب الهندسي في المستوي الاحداثي.

المفردات

التناسب الهندسي

تعلم

تتضمن مخططات المدن والشوارع في تطبيق الخرائط في الاجهزة الالكترونية خطوطاً متوازية واخرى متعامدة، فالمخطط الجانبي يمثل جزءاً من مدينة بغداد ونلاحظ فيه الشوارع متوازية ومتعامدة.

]5-3-1[التناسب في المثلثات — Proportions in Triangles

تعلمت سابقاً المثلثات المتشابهة وبعض مبرهنات التشابه للمثلثات، وسوف تتعلم في هذا البند التناسب في المثلثات مستعيناً بالمبرهنات السابقة.

مبرهنة التناسب المثلثي		
المبرهنة	المعطى	النتيجة
اذا وازى مستقيم ضلعا من اضلاع مثلث وقطع الضلعين الآخرين في نقطتين مختلفتين فإنه يقسم الضلعين الى قطع متناسبة الاطوال (من دون برهان)	$\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ (الشكل: مثلث ABC، E على AC، F على BC)	$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$

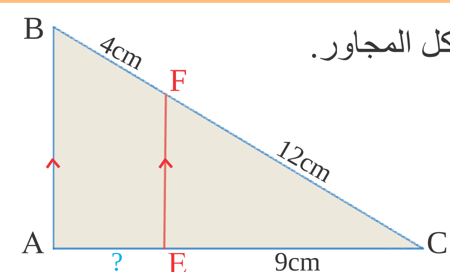
مثال (1) جد طول قطعة المستقيم AE علماً ان: $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ في الشكل المجاور.

مبرهنة التناسب المثلثي

$$\frac{CE}{EA} = \frac{CF}{FB}$$

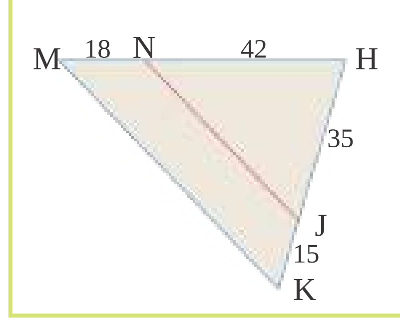
التعويض والتبسيط

$$\frac{9}{EA} = \frac{12}{4} \Rightarrow EA = \frac{4 \times 9}{12} = \frac{36}{12} = 3cm$$



عكس مبرهنة التناسب المثلثي		
المبرهنة	المعطى	النتيجة
اذا قسم مستقيم ضلعين في مثلث الى قطع متناسبة فإنه يكون موازيا للضلع الثالث (من دون برهان)	$\frac{CE}{EB} = \frac{CF}{FA}$ (الشكل: مثلث ABC، F على CA، E على CB)	$\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

مثال (2) في الشكل المجاور برهن ان $\overline{NJ} \parallel \overline{MK}$.



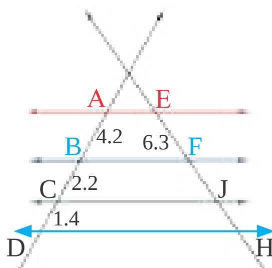
نجد نسبة الاجزاء المتناسبة

$$\frac{HJ}{JK} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}, \quad \frac{HN}{NM} = \frac{42}{18} = \frac{7}{3}$$

$$\because \frac{HJ}{JK} = \frac{HN}{NM} = \frac{7}{3}$$

عكس مبرهنة التناسب المثلثي

$$\therefore \overline{MK} \parallel \overline{NJ}$$

مبرهنة طالس		
المبرهنة	المعطى	النتيجة
اذا قطعت ثلاثة مستقيمات متوازية او اكثر بمستقيمين فإن القطع المحددة بالمستقيمات المتوازية تكون متناسبة.	 $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CE}$	$\frac{AB}{BC} = \frac{DF}{FE}$

مثال (3) استعمل مهندس الرسم المنظوري (هو رسم الاجسام البعيدة بحيث تبدو اصغر والاجسام القريبة حيث تبدو اكبر، مع الحفاظ على هيئتها وتناسب مقاييسها لتبدو ثلاثية الابعاد) ليرسم خطوطاً اولية تساعده على رسم اعمدة اتصالات متوازية، تحقق من رسمه بقياس المسافات بين الاعمدة، كم طول $\overline{FH}$ ؟

A E
B 4.2 6.3 F
C 2.2 J
1.4
D H

$$\overleftrightarrow{AE} \parallel \overleftrightarrow{BF} \parallel \overleftrightarrow{CJ} \parallel \overleftrightarrow{DH}$$

مبرهنة طالس

$$\frac{AB}{BD} = \frac{EF}{FH}$$

$$BD = BC + CD = 2.2 + 1.4 = 3.6m$$

بالتعويض والتبسيط

$$\frac{4.2}{3.6} = \frac{6.3}{FH} \Rightarrow FH = \frac{6.3 \times 3.6}{4.2} = 5.4m$$

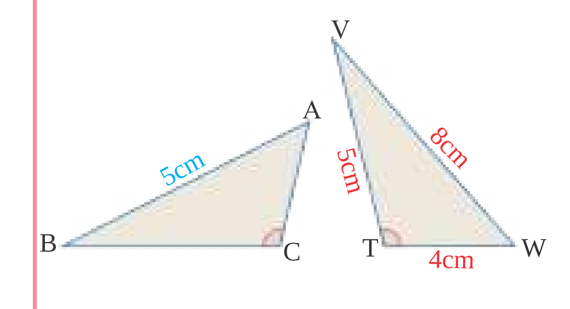
[5-3-2] التناسب والقياس Proportion and Measure

لايجاد نسبة المحيطين ونسبة المساحتين لمثلثان متشابهان، يمكنني استعمال المبرهنة التالية (من دون برهان) .

مبرهنة: اذا تشابه مثلثان بنسبة تشابه $\frac{a}{b}$ فإن نسبة المحيطين للمثلثين تساوي $\frac{a}{b}$ ونسبة المساحتين للمثلثين $\frac{a^2}{b^2}$

اذا كان المثلثان متشابهين، فإن النسبة بين محيطيهما تساوي النسبة بين اطوال الاضلاع المتناظرة.

مثال (4) ليكن $\triangle ABC \sim \triangle WVT$ جد محيط $\triangle ABC$.



نفرض P_1 محيط المثلث WVT

$$P_1 = 8 + 5 + 4 = 17cm$$

استعمل التناسب لاجد محيط المثلث ABC P_2

نفرض P_2 محيط المثلث ABC

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{AB}{WV} \Rightarrow \frac{P_2}{17} = \frac{5}{8}$$

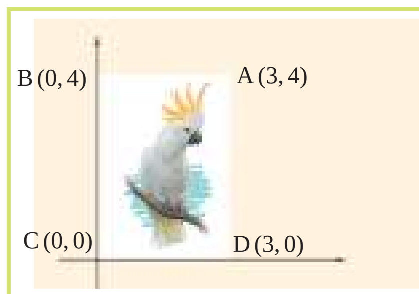
اذن محيط المثلث ABC يساوي

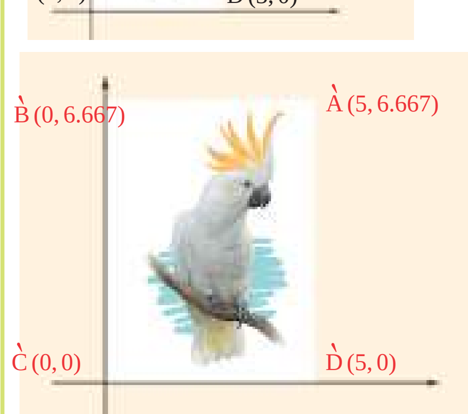
$$\therefore P_2 = 10.625cm$$

تعلمت سابقاً ثلاثة تحويلات هندسية: الانسحاب، الانعكاس، والدوران، وهذه التحويلات تحافظ على الهيئة والقياسات.
سوف تتعلم في هذا الدرس تحويلاً جديداً يحافظ على الهيئة من دون حفظ القياسات، انه التناسب الهندسي Dilation.

التناسب الهندسي: هو تحويل يغير مقاييس الاشكال الهندسية من دون تغيير هيئتها فالشكل وصورته بالتناسب الهندسي يكونان دائماً متشابهين، مركز التناسب هو نقطة الاصل.
سنقتصر دراسة التناسب الهندسي في هذا الدرس على المستوي الاحداثي، اذا تعاملت مع تناسب هندسي معامله الهندسي M فسوف يكون بامكانك ان تجد صورة النقطة بضرب احداثياتها في M. $(x,y) \to (Mx, My)$

مثال (5) يبين الرسم المجاور موقع صورة على شبكة الانترنيت، ارسم حدود الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{5}{3}$.





الخطوة (1): اضرب معامل التناسب الهندسي في احداثيات الرؤوس.

$$A(3,4) \to (\frac{5}{3} \times 3, \frac{5}{3} \times 4) \longrightarrow \grave{A}(5, 6.667)$$

$$B(0,4) \to (\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 4) \longrightarrow \grave{B}(0, 6.667)$$

$$C(0,0) \to (\frac{5}{3} \times 0, \frac{5}{3} \times 0) \longrightarrow \grave{C}(0,0)$$

$$D(3,0) \to (\frac{5}{3} \times 3, \frac{5}{3} \times 0) \longrightarrow \grave{D}(5,0)$$

الخطوة (2): اضع النقاط $\grave{A}, \grave{B}, \grave{C}, \grave{D}$ على المستوي الاحداثي ثم اصل بينهم لاحصل على المستطيل $\grave{A}\grave{B}\grave{C}\grave{D}$.

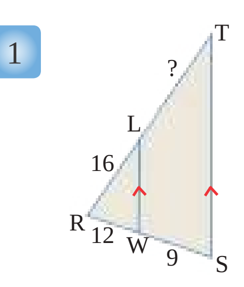
تأكَّدْ من فهمِكَ **جد طول القطعة المستقيمة المجهولة في الاشكال الاتية:**



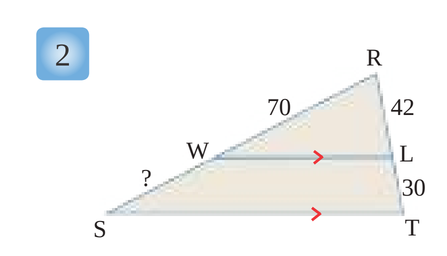
الاسئلة 1-2 مشابهة للامثلة 1-3

الاسئلة 3-4 مشابهة للمثال 2

1



2



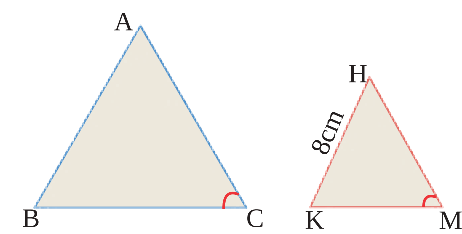
3 في المثلث MQP، $MQ = 12.5, MR = 4.5, MP = 25, MN = 9$ هل $\overline{QP} \parallel \overline{RN}$ او لا؟ برر اجابتك.
حيث $N \in \overline{MP}, R \in \overline{MQ}$

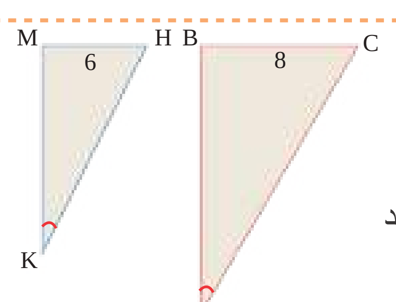
4 في الرسم المجاور جد طول $\overline{KN}, \overline{MN}$

السؤال 4 مشابه للمثال 3

5 المثلثان ABC,HKM متشابهان، مساحة $\triangle ABC$ ضعف مساحة $\triangle HKM$، ما طول $\overline{AB}$ ؟

السؤالين 5,6 مشابهان للمثالين 4,5





6 المثلثان KMH ,ABC متشابهان، جد مساحة ومحيط المثلث ABC علماً ان محيط المثلث KMH يساوي 18cm ومساحته $15cm^2$. السؤال 6 مشابه للمثال 4

7 ABC مثلث حيث $A(6,0), B(-3,\frac{3}{2}), C(3,-6)$ ، جد صورته بعد تصغيره بمعامل $\frac{1}{3}$ ، علماً ان مركز التناسب هو نقطة الاصل.

السؤال 7 مشابه للمثال 5

تدربْ وحلّ التمرينات

8 في المثلث ACD، $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ جد قيمة x و $\overline{ED}$ اذا كان: $ED = 3x - 3, BC = 8, AE = 3, AB = 2$.

9 حدّد ما اذا كان $\overline{MK} \parallel \overline{AB}$ في الشكل المجاور.

10 نسبة مساحة المثلث ABC الى نسبة مساحة المثلث KMH تساوي $\frac{16}{25}$ ما نسبة تشابه المثلثين وما النسبة التشابه بين محيطيهما ؟

11 جد صورة المثلث ABC حيث: $A(-1,-1), B(1,-2), C(1,2)$ تحت تأثير تناسب معامله 2.

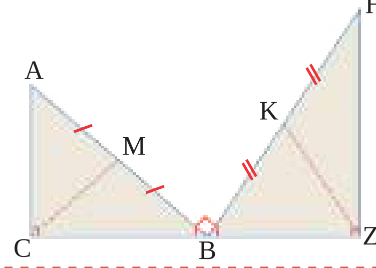
تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

12 **طرق:** تمثل الخريطة المجاورة بعض الشوارع المتوازية وطريقين عبرها، ما طول الطريق الاول بين الشارع 62 والشارع 52؟

13 **هندسة:** جد صورة الشكل الرباعي حيث: $A(2,6), B(-4,0), C(-4,-8), D(-2,-12)$ تحت تأثير تناسب معامله $\frac{1}{4}$

فَكِّرْ

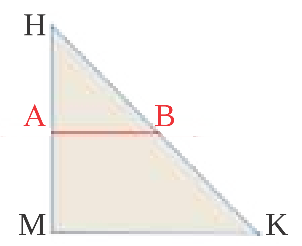
اذا علمت ان طول القطعة المستقيمة الواصلة من رأس القائمة الى منتصف الوتر تساوي نصف طول الوتر اجب عن السؤال 14.



14 **تحدّ:** في الرسم المجاور M منتصف $\overline{AB}$ و K منتصف $\overline{HB}$ ، الزوايا: $\angle Z, \angle ABH, \angle C$ قائمة، برهن ان $\frac{(BZ)^2 + (ZH)^2}{(BC)^2 + (CA)^2} = \left(\frac{KZ}{CM}\right)^2$.

أكتب

ما تستطيع من تناسبات اذا علمت ان $\overline{AB} \parallel \overline{MK}$ في الشكل المجاور.



الدرسُ]5-4[الدائرة
The Circle

فكرةُ الدرس
- اجد قياس الاقواس والزوايا المركزية للدوائر.
- أتعرف الى المماس والمماس المشترك.

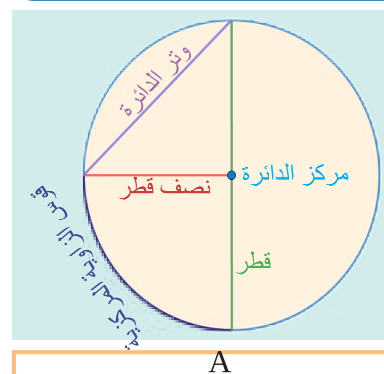
المفردات
- القوس، الوتر.
- المماس، المماس المشترك.
- الزوايا المركزية.



كل زاوية بين عقربي ساعة هي زاوية مركزية و**الزاوية المركزية** هي الزاوية التي تقطع الدائرة في نقطتين ورأسها هو مركز الدائرة وكل زاوية مركزية في دائرة يقابلها قوس على الدائرة يسمى **قوس الزاوية**، ما قياس $\overset{\frown}{AB}$ المقابل $\angle AOB$ ؟ وهل هناك عدة انواع من الاقواس؟

]5-4-1[القوس والوتر Arc and Chord

تعرفت سابقاً الى مفهوم **الدائرة**: وهي مجموعة من النقاط المتصلة في المستوي التي لها البعد نفسه عن نقطة ثابتة تسمى **مركز الدائرة**، و**نصف قطر الدائرة r** : هو قطعة مستقيمة تصل بين مركز الدائرة ونقطة على الدائرة، **وتر الدائرة**: هو قطعة مستقيمة طرفاها على الدائرة، **قطر الدائرة**: هو وتر يمر بمركز الدائرة.
وسوف تزيد معلوماتك عن الدائرة في هذا الدرس لتتعرف الى القوس وقياسه بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له.

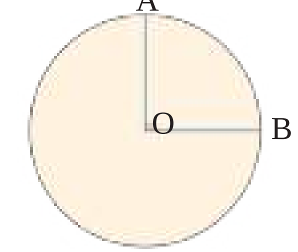


مثال (1) كيف اجد قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$ بدلالة الزاوية المركزية المقابلة له؟

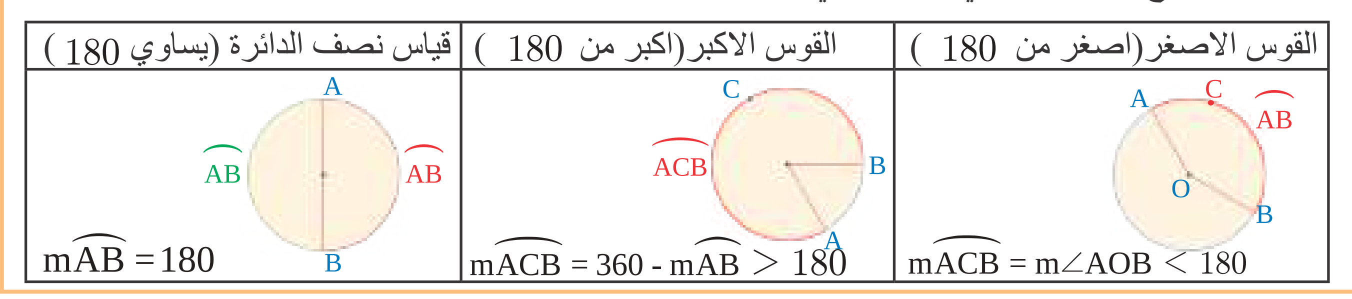
قياس الزاوية المركزية يكافئ قياس القوس المقابل لها ويرمز للقوس $\overset{\frown}{AB}$

الزاوية AOB قائمة $\qquad m\angle AOB = 90^\circ$

اذن قياس القوس المقابل للزاوية AOB يساوي $\overset{\frown}{AB} = 90$

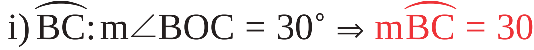


هناك ثلاثة انواع من الاقواس في الدائرة وهي:



القوس الاصغر (اصغر من 180)	القوس الاكبر (اكبر من 180)	قياس نصف الدائرة (يساوي 180)
$m\overset{\frown}{ACB} = m\angle AOB < 180$	$m\overset{\frown}{ACB} = 360 - m\overset{\frown}{AB} > 180$	$m\overset{\frown}{AB} = 180$

مثال (2) جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة في الشكل المجاور:



i) $\overset{\frown}{BC}: m\angle BOC = 30^\circ \Rightarrow m\overset{\frown}{BC} = 30$

ii) $\overset{\frown}{DC}: m\angle COD = 90^\circ \Rightarrow m\overset{\frown}{DC} = 90$

iii) $\overset{\frown}{BCD}: m\angle BOC + m\angle COD = 30^\circ + 90^\circ = 120^\circ$

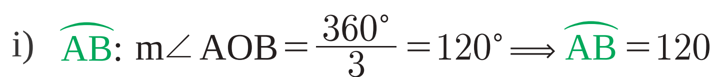
$m\overset{\frown}{BCD} = 120$

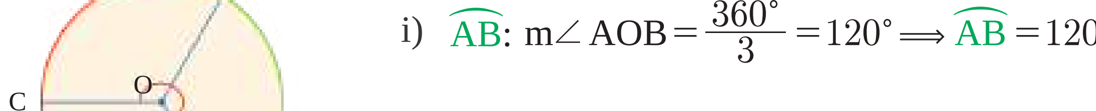
iv) $\overset{\frown}{BEA}: m\angle BOA = 180^\circ \Rightarrow m\overset{\frown}{BEA} = 180$

iv) $\overset{\frown}{AD}: m\angle AOD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow m\overset{\frown}{AD} = 60$

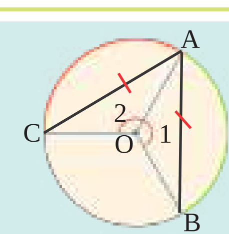
مثال (3) الدائرة المقابلة مقسمة على ثلاثة اجزاء متطابقة، جد قياس الاقواس الآتية: $\overset{\frown}{AB}$ ، $\overset{\frown}{ABC}$.

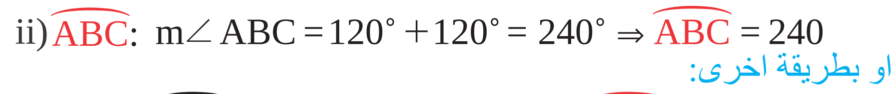
هناك ثلاث زوايا مركزية متطابقة مجموعها °360





i) $\overset{\frown}{AB}$: $m\angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \Longrightarrow \overset{\frown}{AB} = 120$



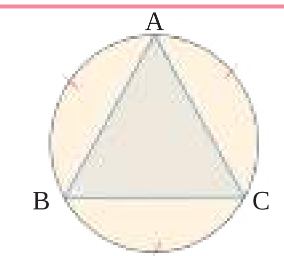


ii) $\overset{\frown}{ABC}$: $m\angle ABC = 120^\circ + 120^\circ = 240^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = 240$

او بطريقة اخرى:

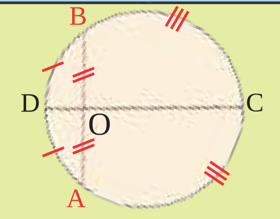
$\overset{\frown}{ABC} = 360^\circ - 120^\circ = 240^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{ABC} = 240$

لاحظ المثلثين والزاويتين المركزيتين 1,2 والقوسين $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{CA}$ والوترين $\overline{AB}, \overline{CA}$ اذا تطابقت الزاويتان تطابق القوسان وتطابق المثلثان فيتطابق الوتران $\overline{AB}, \overline{CA}$ ويمكنك ان تستعمل مثل هذه الطريقة للتوصل الى المبرهنة التالية (من دون برهان):



مبرهنة الاقواس والاوتار والزاوية المركزية، في كل دائرة او في دائرتين متطابقتين	
• اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق وتراهما وبالعكس.	$\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \overline{AB} \cong \overline{AC}$
• اذا تطابقت زاويتان مركزيتان تطابق قوساهما وبالعكس.	$\angle 1 \cong \angle 2 \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AC}$
• اذا تطابق قوسان تطابق وتراهما وبالعكس.	$\overline{AB} \cong \overline{AC} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AC}$

مثال (4) استعمل مبرهنة الاقواس والاوتار لتبرهن ان المثلث ABC متساوٍ الاضلاع في الدائرة المقابلة علماً ان $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$



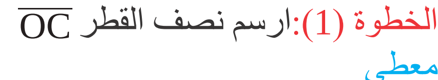
معطى في السؤال $\because\ \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{CB}$

مبرهنة الاقواس والاوتار $\therefore\ \overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{CB}$

لذا فان المثلث ABC متساوي الاضلاع.

مبرهنة القطر العمودي، في كل دائرة	
مبرهنة: القطر العمودي على وتر في دائرة ينصف الوتر وينصف كلا قوسيه. $\overline{CD} \perp \overline{AB} \Rightarrow AO = BO,\ \overset{\frown}{AD} \cong \overset{\frown}{DB},\ \overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{AC}$	B D O C A

مثال (5) استعمل مبرهنة القطر العمودي، وجد طول الوتر AB اذا علمت ان نصف القطر OD يساوي 5cm. وان DE=2cm



الخطوة (1): ارسم نصف القطر $\overline{OC}$

معطى $OC = OD = 5cm,\ DE = 2cm$

$OE = 5 - 2 = 3cm$

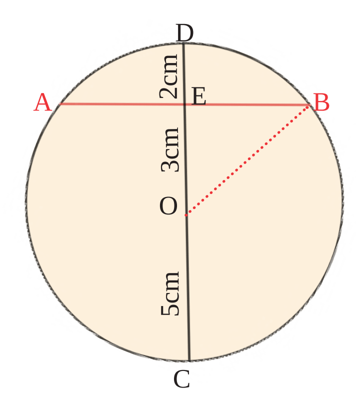
الخطوة (2): مبرهنة فيثاغورس $(EB)^2 + (EO)^2 = (OB)^2$

بالتعويض $25 - 9 = (EB)^2$

بالتبسيط $(EB)^2 = 16 \Rightarrow EB = 4cm$

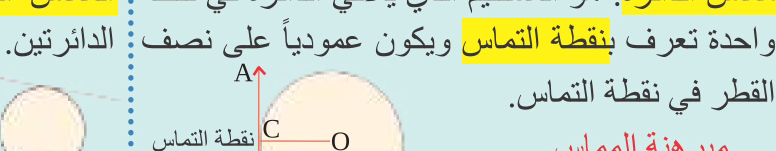
E منتصف $\overline{AB}$ مبرهنة القطر العمودي $\therefore\ AB = 2 \times EB = 2 \times 4 = 8cm$

القطر $\overline{DC}$ عمودي على الوتر $\overline{AB}$ وينصفه



مماس الدائرة: هو المستقيم الذي يلاقي الدائرة في نقطة واحدة تعرف **بنقطة التماس** ويكون عمودياً على نصف القطر في نقطة التماس.

مبرهنة المماس



المماس المشترك لدائرتين: هو مستقيم مماس لكل من الدائرتين.

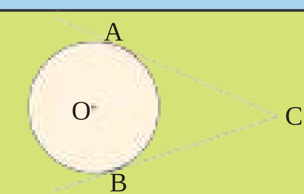


مبرهنة المماسين

مبرهنة: القطعتان المماستان المرسومتان لدائرة من نقطة خارجة عنها متطابقتان.

$\overline{CB}, \overline{CA}$ مماسان للدائرة من نقطة C.

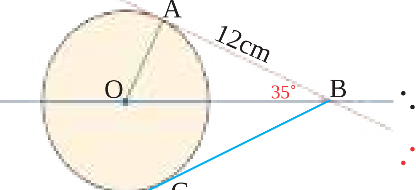
$\therefore \overline{CB} \cong \overline{CA}$



مثال (6)

دائرة مركزها O في الشكل المجاور، $\overline{AB}$ هو مماس للدائرة في A وقياس الزاوية ABO يساوي 35°

جد قياس الزاوية AOB، ثم جد طول القطعة المستقيمة BC.



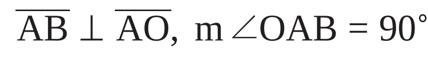
$\overline{BA}$ مماس الدائرة في النقطة A

مبرهنة المماس: $\overline{AB} \perp \overline{AO}, \ m\angle OAB = 90^\circ$

معطى: $\because m\angle OBA = 35^\circ$

مجموع زوايا المثلث 180°: $\therefore m\angle AOB = 180^\circ - (90^\circ + 35^\circ) = 55^\circ$

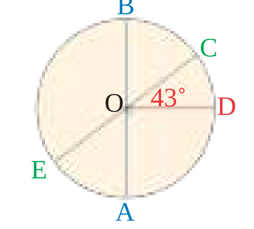
مبرهنة المماسين: BC=12cm



تأكَّدْ من فهمِكَ

في الدائرة ادناه، جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي:

الاسئلة 1-4 مشابهة للامثلة 1,2



1. $\angle AOD$
2. $\angle COB$
3. $\overset{\frown}{DBE}$
4. $\overset{\frown}{DAB}$

دائرة مقسمة على 6 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي:

الاسئلة 5-7 مشابهة للمثال 3

F, E, A, O, D, B, C

5. $\overset{\frown}{AB}$
6. $\overset{\frown}{ABC}$
7. $\overset{\frown}{ABD}$

8. الدائرة المجاورة مقسمة على 4 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCD مربع.

السؤال 8 مشابه للمثال 4

D, A, O, C, B

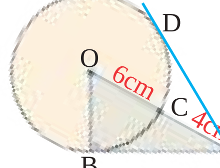
9. في الشكل المجاور استعمل مبرهنة القطر العمودي وجد طول القطعة المستقيمة AB في الدائرة المجاورة مقرباً الناتج الى اقرب عُشر.

السؤال 9 مشابه للمثال 5



10. استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AB,AD في الشكل المجاور.

السؤال 10 مشابه للمثال 6



تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد قياس الزوايا والاقواس فيما يأتي:

11 $\angle COA$

12 $\overset{\frown}{DBE}$

13 $\overset{\frown}{BAC}$

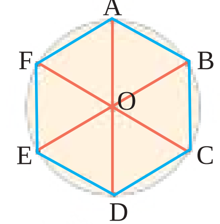
14 $\overset{\frown}{DCA}$

الدائرة مقسمة على 8 اجزاء متطابقة جد قياس كل قوس مما يأتي:

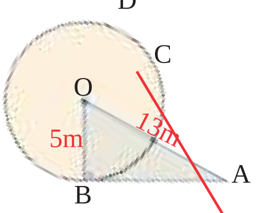
15 $\overset{\frown}{AB}$

16 $\overset{\frown}{ABC}$

17 $\overset{\frown}{GDB}$



18 الدائرة المجاورة مقسمة على 6 اجزاء متطابقة، برهن ان الشكل ABCDEF سداسي منتظم.

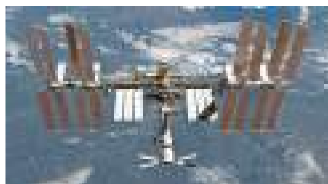


19 استعمل مبرهنة المماس لتجد طول القطع المستقيمة AB,AC في الدائرة المجاورة.

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

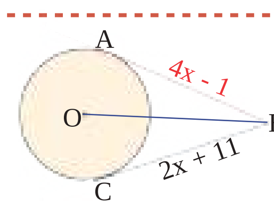


20 **جغرافية (براكين):** ترتفع فوهة بركان (هوالالاي) عن مستوى سطح البحر 2.52km، احسب المسافة بين قمة البركان ومستوى الافق اذا علمت ان نصف قطر الارض 6437km تقريباً مقرباً الناتج لاقرب كيلومتر.

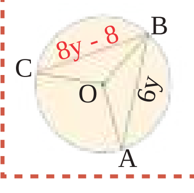


21 **محطة فضائية:** تبعد محطة مير الروسية عن مستوى سطح البحر مسافة 390km تقريباً، ما المسافة بين هذه المحطة والافق، مقرباً الناتج الى اقرب كيلومتر. علماً ان نصف قطر الارض 6437km تقريباً.

فَكِّرْ



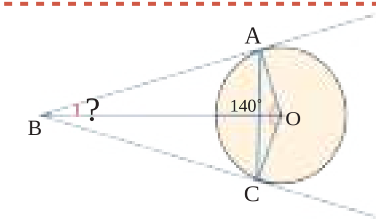
22 **تحدٍ:** استعمل مبرهنة المماسين وجد طول $\overline{AB}$ في الدائرة المجاورة.



23 **حس عددي:** اذا كانت الزاويتان COB,AOB متطابقين، جد طول $\overline{CB}$ في الدائرة المجاورة.

أكتبْ

الخطوات اللازمة لتجد قياس زاوية ABC في الرسم المجاور اذا علمت ان $\overline{BO}$ ينصف الزاوية AOC والتي قياسها يساوي $140°$.



الدرسُ]5-5[المثلث والدائرة، القطع المستقيمة والدائرة

Triangle and Circle and Line Segments and Circle

فكرةُ الدرس

- استعملُ خصائص المحاور ومنصفات الزوايا لارسم الدائرة المحيطة والدائرة المحاطة في مثلث.
- اجد اطوال القطع المستقيمة يحددها قاطعان على دائرة.

المفردات

- الدائرة المحيطة.
- الدائرة المحاطة.

تعلم

في $\triangle ABC$ المجاور يتقاطع محور BC ومحور AB في O.

$OB = OC$ لان O تقع على محور BC

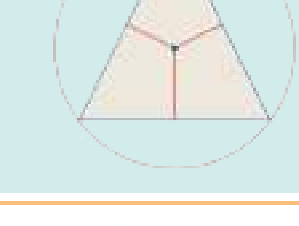
$OA = OC$

وبالتالي O تقع على محور AC اي ان محور AC يمر في O

$\because OA = OB = OC$

نستطيع ان نرسم دائرة مركزها O وتمر في رؤوس المثلث ABC.

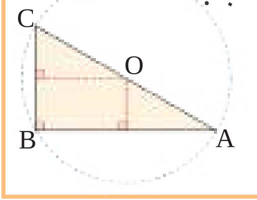
]5-5-1[المثلث والدائرة Triangle and Circle



تعرفنا سابقاً في الدرس (2) الى مبرهنة (القطعة المستقيمة المتوسطة للمثلث): [تتقاطع محاور الاضلاع الثلاثة للمثلث في نقطة واحدة]. ومنها نستطيع ان نرسم الدائرة المحيطة بالمثلث. الدائرة المحيطة (الدائرة الخارجية للمثلث): لكل مثلث دائرة واحدة تحيط به مركزها نقطة تقاطع المحاور الثلاثة.

المحاور: هي الاعمدة المقامة على اضلاع مثلث من منتصفاتها تلتقي بنقطة واحدة (O) تكون متساوية البعد عن رؤوسه وهذه النقطة هي مركز الدائرة التي تمر برؤوس المثلث.

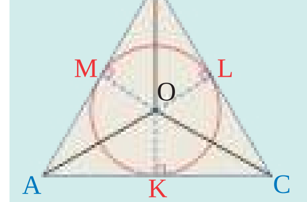
مثال (1(جد نقطة تقاطع محاور المثلث ABC كما في الشكل المجاور وارسم الدائرة المحيطة به.



محور $\overline{AB}$ يمر في منتصف $\overline{AB}$ ويوازي $\overline{BC}$

محور $\overline{BC}$ يمر في منتصف $\overline{BC}$ ويوازي $\overline{AB}$

$\therefore$ المحاور الثلاثة تلتقي في منتصف $\overline{AC}$ والتي تمثل مركز الدائرة المحيطة بالمثلث.



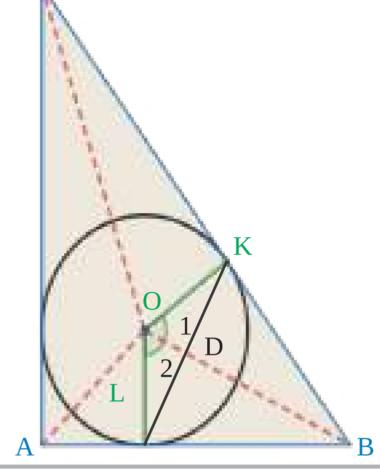
بالامكان الاستفادة من مبرهنة منصفات زوايا المثلث لرسم الدائرة المحاطة بمثلث (الدائرة الداخلية للمثلث)

- تتقاطع منصفات زوايا المثلث في نقطة واحدة.
- نقطة تقاطع منصفات الزوايا تقع على المسافة نفسها من الاضلاع الثلاثة.

في كل مثلث توجد دائرة داخل المثلث مماسة لاضلاعه الثلاثة وتسمى الدائرة المحاطة.

$OL = OK = OM$

مثال (2(الدائرة التي مركزها O محاطة بالمثلث ABC برهن ان $\overline{BO}$ منصف $\angle LOK$ والمحور $\overline{KL}$.



مبرهنة المماسين $BK=BL$

نصفا قطري الدائرة $OK=OL$

$\because$ المثلثان BOK,BOL متطابقان (مبرهنة التطابق ض.ض.ض)

من التطابق $m\angle 1 = m\angle 2$

$\overline{BO}$ ينصف الزاوية LOK

المثلثان KDB,LDB متطابقان (ض.ز.ض).

$\overline{KL} \perp \overline{BO}$

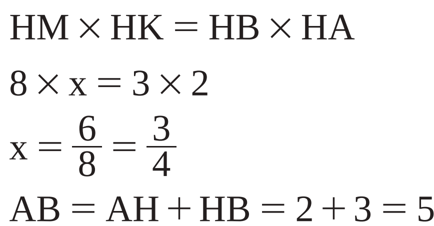
$\therefore$ $\overline{KL}$ محور $\overline{BO}$

تعلمت في الدرس (4-5) كيف اجد اطوال اجزاء وتر يتقاطع مع قطر عمودي عليه، ولكن كيف اجد اطوال اوتار متقاطعة اخرى؟

مبرهنة القاطعين للدائرة	
المبرهنة	
اذا قطع مستقيمان متقاطعان دائرة تشكل على كل منهما قطعتان مستقيمتان، ناتجا ضرب طوليهما متساويان.	$HM \times HK = HB \times HA$ $HB \times HA = HM \times HK$

مثال (3)

جد قيمة x وطول كل وتر.

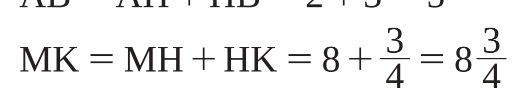


مبرهنة القاطعين في الدائرة $\quad HM \times HK = HB \times HA$

بالتعويض $\quad 8 \times x = 3 \times 2$

$$x = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

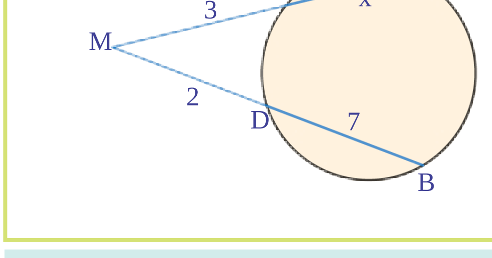
طول الوتر AB $\quad AB = AH + HB = 2 + 3 = 5$



طول الوتر MK $\quad MK = MH + HK = 8 + \frac{3}{4} = 8\frac{3}{4}$

مثال (4)

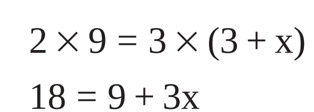
جد قيمة x وطول كل من $\overline{AM}, \overline{BM}$.



مبرهنة القاطعين في الدائرة $\quad MD \times MB = MC \times MA$

بالتعويض $\quad 2 \times 9 = 3 \times (3 + x)$

$$18 = 9 + 3x$$



$$3x = 18 - 9 = 9$$

$$x = \frac{9}{3} = 3$$

طول $\overline{AM} = 6$ ،

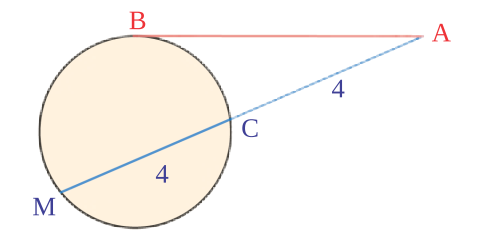
طول $\overline{BM} = 9$ ،

يمكن استعمال حاصل ضرب جزئي القاطع مع مبرهنة القاطع والمماس وفي هذه الحالة يكون المماس هو الجزء الخارجي و الكلي للقطعة نفسها.

مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة	
المبرهنة	
من نقطة خارج الدائرة اذا رسم مماساً ومستقيماً قاطعاً لها. فأن ناتج ضرب طولي قطعتي القاطع، يساوي مربع طول قطعة المماس. $AC \times AM = (AB)^2$	

مثال (5)

جد طول قطعة المماس AB .

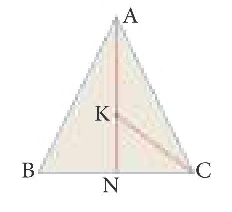


مبرهنة المماس والقاطع في الدائرة $\quad AC \times AM = (AB)^2$

بالتعويض $\quad 4 \times 8 = 32$

طول قطعة المماس AB $\quad \therefore AB = 4\sqrt{2}$

تأكَّدْ من فهمِكَ



1 المثلث ABC متساوي الساقين $AB = AC$ ، N منتصف $\overline{BC}$, $\overline{KC} \cong \overline{KA}$ برهن ان K هي نقطة تقاطع محاور المثلث ABC . ثم ارسم الدائرة المحيطة به.

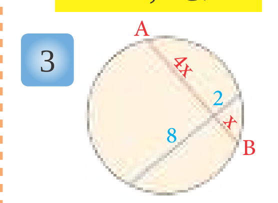
الاسئلة 2-1 مشابهة للمثال 1

2 ABC مثلث منتظم، طول ضلعه 12cm حدِّد نقطة تقاطع محاوره ثم ارسم الدائرة المحيطة به وجد طول قطرها.

الاسئلة 5-3 مشابهة للمثالين 3,4

جد قيمة x وطول كل قطعة مجهولة لكل مما يأتي:

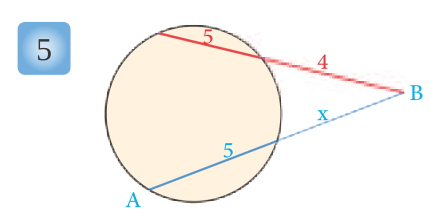
3



4

9
B
x
4
12
A

5



الاسئلة 6,7 مشابهة للمثال 5

جد قيمة x وطول $\overline{AB}$.

6

B
x
A
12
4

7

6
A
x
x+1
B

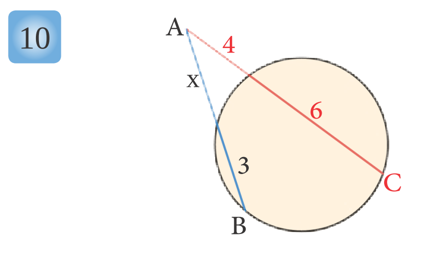
تدربْ وحلّ التمرينات

8 ABC مثلث قائم متساوِ الساقين وطول كل من ساقيه 6cm ، ارسم الدائرة التي يحيط بها المثلث ABC وجد مساحة الدائرة.

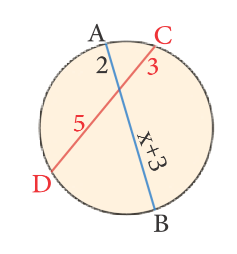
9 ABC مثلث قائم متساوِ الساقين وتره $\overline{BC}$ حدِّد نقطة تقاطع محاور هذا المثلث وارسم الدائرة المحيطة به.

جد قيمة x وطول القطع المستقيمة المجهولة لكل مما يأتي:

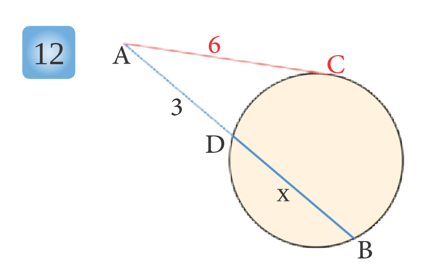
10



11



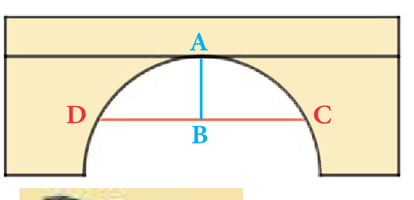
12



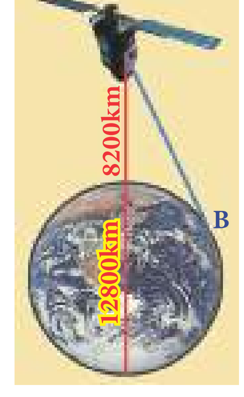
13



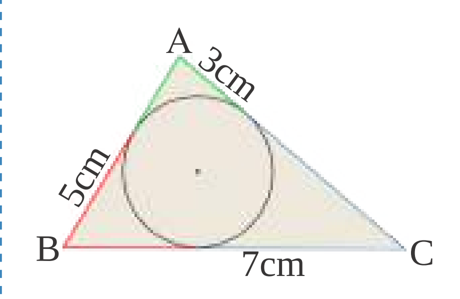
تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



14 بناء: يرتكز جسر على قوس دائرة كما مبين في الشكل المقابل، $\overline{AB}$ محور $\overline{DC}$ ما قطر الدائرة؟ $DC=150m$, $AB=60m$

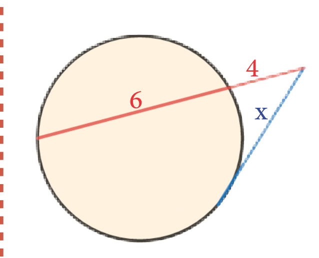


15 فضاء: قمر صناعي يدور حول الارض على ارتفاع 8200km اذا كان قطر الارض 12800km تقريباً، ما المسافة التي تفصل القمر الصناعي عن النقطة B في الشكل المجاور.



16 هندسة: في الشكل المجاور، جد محيط المثلث ABC.

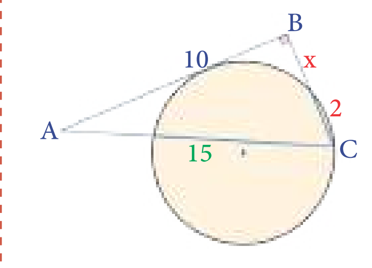
فَكِّرْ



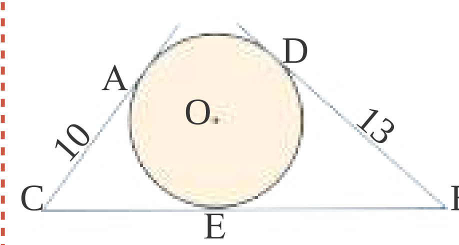
17 **اكتشف الخطأ:** فيما يلي حلان لايجاد قيمة x في الشكل المقابل، ايهما الحل الخطأ؟ برر اجابتك.

مبرهنة المماس والقاطع

$$i)\ 4 \times 6 = x^2$$
$$24 = x^2 \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$$
$$ii)\ x^2 = 40 \Rightarrow x = 2\sqrt{10}$$



18 **تحدٍ:** في الشكل المقابل $AB = 10$ وهو مماس للدائرة، جد قيمة x.



19 **مسألة مفتوحة:** في الشكل المجاور دائرة مركزها O $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{BD}$ مماسات للدائرة، جد طول القطعة BC.

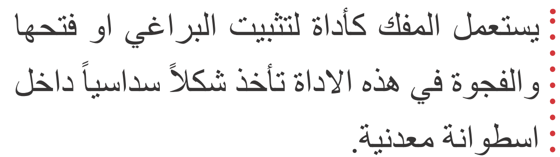
أكتب

مسألة تستعمل فيها المحاور ومنصفات الزوايا لمثلث في رسم دائرة محيطة به.

الدرسُ]5-6[الزوايا والدائرة
Angles and Circle

فكرةُ الدرس
- اجد قياس الزوايا المحيطية والمماسية.
- ايجاد قياسات زوايا تتقاطع اضلاعها مع دائرة.

المفردات
- الزاوية المحيطية.
- الزاوية المماسية.

يستعمل المفك كأداة لتثبيت البراغي او فتحها والفجوة في هذه الاداة تأخذ شكلاً سداسياً داخل اسطوانة معدنية.
وكل زاوية في الشكل السداسي تكوّن زاوية محيطية داخل الدائرة.

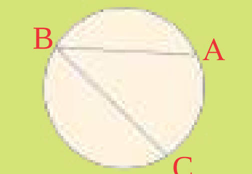


]5-6-1[الزاوية المحيطية Inscribed Angle

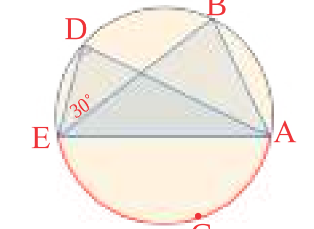
درست سابقاً تعريف القوس بدلالة الزاوية المركزية وكيفية قياس القوس وفي هذا الدرس سنتعرف الى:

الزاوية المحيطية: وهي الزاوية التي رأسها نقطة من نقاط الدائرة وضلعاها وتران في الدائرة .

وكذلك سنتعرف الى كيفية قياسها باستعمال القوس المواجه لها بواسطة المبرهنات التالية وهي من دون برهان.

مبرهنة الزوايا المحيطية	
قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المواجه لها. $m\angle B = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{AC}$	

مثال (1) جد قياس الزوايا المحيطية التالية في الشكل المجاور.



ii) $\angle BAD$

مبرهنة الزوايا المحيطة $m\angle BAD = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{BD}$

$m\angle BED = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{BD}$

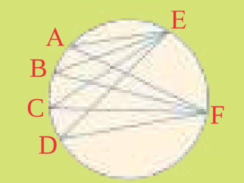
بالتعويض $\therefore m\angle BED = m\angle BAD = 30^\circ$

i) $\angle D$

$m\angle D = \frac{1}{2} m\,\overset{\frown}{ECA}$

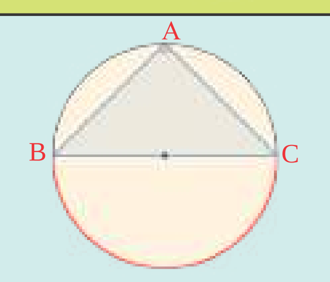
$= \frac{140}{2} = 70$

$m\angle D = 70^\circ$

مبرهنة الزوايا المحيطية المواجهة للقوس نفسه	
كل الزوايا المحيطية التي تواجه قوساً مشتركاً على الدائرة تتطابق. $m\angle A \cong m\angle B \cong m\angle C \cong m\angle D = m\,\overset{\frown}{EF}$	

هناك حالة خاصة للزاوية المحيطية عندما تكون زاوية قائمة:
- كل زاوية محيطية تواجه نصف دائرة تكون قائمة.
- كل زاوية محيطية تواجه قطراً تكون قائمة.
- كل زاوية محيطية قائمة تواجه قطراً.

$m\angle A = 90^\circ \Rightarrow m\,\overset{\frown}{BC} = 90$





مثال (2) دائرة قطرها $\overline{KH}$ تقطع $\overline{HL}$ في N وتقطع $\overline{KL}$ في M، كما في الشكل



المجاور، برهن ان $\overline{KN}$ و $\overline{HM}$ ارتفاعات في المثلث HKL.

$\because m\angle HNK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

$\therefore m\angle HNK = 90^\circ$ قائمة

$\overline{KN}$ ارتفاع في المثلث HKL

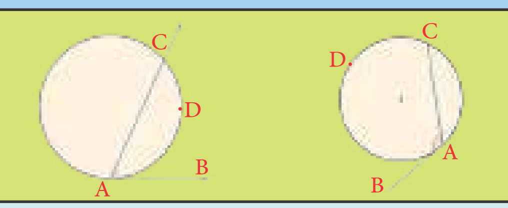
$\because m\angle HMK$ زاوية محيطية تواجه القطر $\overline{KH}$

$\therefore m\angle HMK = 90^\circ$ قائمة

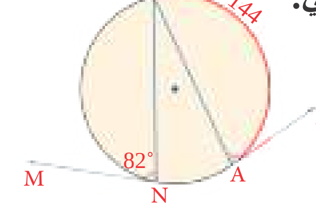
$\overline{HM}$ ارتفاع في المثلث HKL

[5-6-2] الزاوية المماسية Tangential Angle

الزاوية المماسية: هي الزاوية التي يشكلها مماس الدائرة مع مستقيم اخر يمر في نقطة التماس (وتر للدائرة).

مبرهنة الزوايا المماسية	
اذا تقاطع مماس الدائرة مع مستقيم يمر في نقطة التماس يكون قياس الزاوية بينهما نصف قياس القوس المقتطع. $m\angle A = \frac{1}{2} m\,\widehat{ADC}$	

مثال (3) باستعمال مبرهنة الزوايا المماسية والشكل المجاور جد قياس كل مما يأتي:



ii) $\widehat{NC}$

مبرهنة الزوايا المماسية $m\angle CNM = \frac{1}{2} m\,\widehat{CN}$

بالتعويض $82^\circ = \frac{1}{2} m\,\widehat{CN}$

$\therefore m\,\widehat{CN} = 164$

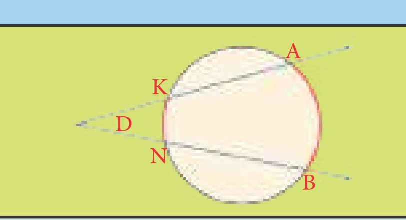
i) $\angle BAC$

$m\angle BAC = \frac{1}{2} m\,\widehat{CA}$

$= \frac{144}{2} = 72$

$\therefore m\angle BAC = 72^\circ$

[5-6-3] الزوايا الداخلية والخارجية في الدائرة Internal and External Angels in the Circle

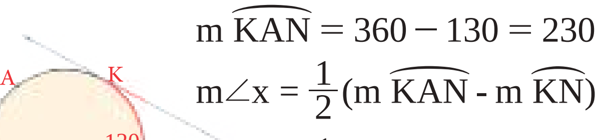
مبرهنة الزاوية الخارجية في دائرة	
اذا تقاطع مستقيمان خارج دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف الفرق بين قياس القوسين المقتطعين. $m\angle D = \frac{1}{2}(m\,\widehat{AB} - m\,\widehat{KN})$	

مثال (4) جد قياس الزاوية الخارجية x في كل مما ياتي:

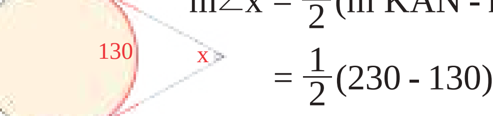


ii) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض عن قيمة $\widehat{KAN}$ بـ 360 نجد قياس زاوية x.

$m\,\widehat{KAN} = 360 - 130 = 230$



$m\angle x = \frac{1}{2}(m\,\widehat{KAN} - m\,\widehat{KN})$



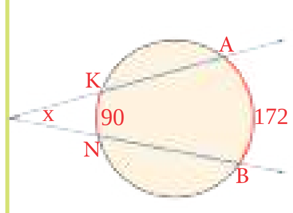
$= \frac{1}{2}(230 - 130)$

$\therefore m\angle x = \frac{100^\circ}{2} = 50^\circ$

i) باستعمال مبرهنة الزاوية الخارجية في الدائرة وبالتعويض



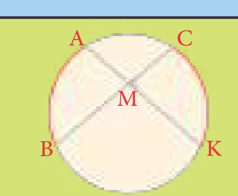
عن قيمة الاقواس في الرسم نجد قياس زاوية x.



$m\angle x = \frac{1}{2}(m\,\widehat{AB} - m\,\widehat{KN})$

$= \frac{1}{2}(172 - 90)$

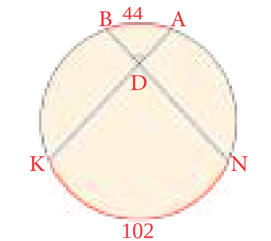
$\therefore m\angle x = \frac{82^\circ}{2} = 41^\circ$

مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة	
اذا تقاطع مستقيمان داخل دائرة فقياس الزاوية بينهما يساوي نصف مجموع قياس القوسين المقتطعين. $m\angle CMK = \frac{1}{2}(m\,\overset{\frown}{CK} + m\,\overset{\frown}{AB})$	

مثال (5)



جد قياس $\angle ADB$ مستعملاً مبرهنة الزاوية الداخلية في الدائرة.



مبرهنة الزاوية الداخلية في دائرة

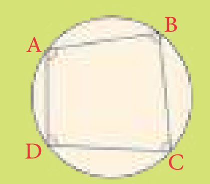
$$m\angle ADB = \frac{1}{2}(m\,\overset{\frown}{KN} + m\,\overset{\frown}{AB})$$

بالتعويض

$$= \frac{1}{2}(102 + 44)$$

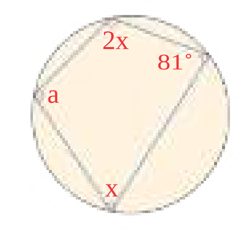
$$\therefore m\angle ADB = \frac{146^\circ}{2} = 73^\circ$$

يمكن ايجاد دائرة تمر في الرؤوس الاربعة لرباعي ويسمى هذا الرباعي بالرباعي الدائري.

مبرهنة الرباعي الدائري	
في كل رباعي دائري مجموع قياس كل زاويتين متقابلتين يساوي 180° $m\angle A + m\angle C = 180^\circ$ $m\angle B + m\angle D = 180^\circ$	

مثال (6)

جد قيمة x, a في الشكل المجاور:



مبرهنة الرباعي الدائري

$$\because a + 81^\circ = 180^\circ$$

$$\therefore a = 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ$$

مبرهنة الرباعي الدائري

$$\because x + 2x = 180^\circ \Rightarrow 3x = 180^\circ$$

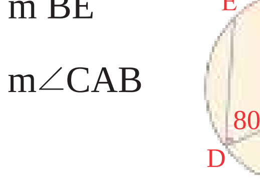
$$\therefore x = 60^\circ$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

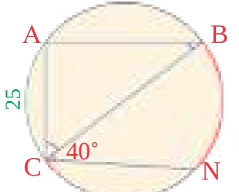
جد قياس كلّ ممّا يأتي:

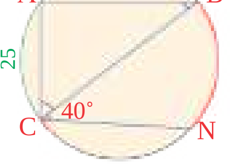


1. $m\,\overset{\frown}{BE}$
3. $m\angle CAB$



2. $m\angle ABC$
4. $m\angle ACB$
5. $m\,\overset{\frown}{BN}$



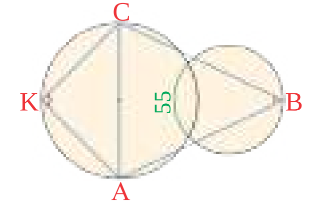


الاسئلة 5-1 مشابهة للمثال 1

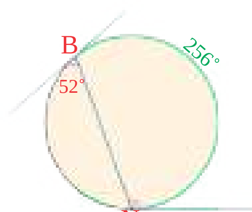
الاسئلة 10,7,6 مشابهة للمثال 2

الاسئلة 8,9 مشابهة للمثال 3

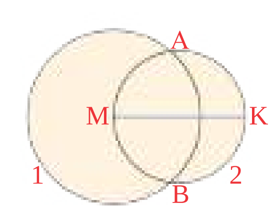
6. $m\angle CKA$
8. $m\angle CBA$



7. $m\angle MNB$
9. $m\,\overset{\frown}{BN}$



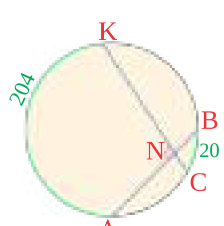
10. اذا علمت ان M مركز الدائرة 1 و $\overline{MK}$ هو قطر الدائرة 2، برهن ان $\overline{KB}$ و $\overline{KA}$ مماسان للدائرة 1.



جد قياس كل مما يأتي:

الاسئلة 11,12 مشابهة للامثلة 4,5,6 على الترتيب

11 $m\angle KNA$



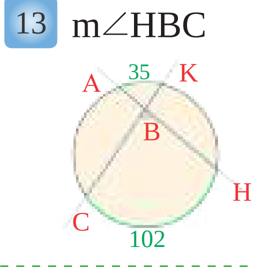
12 



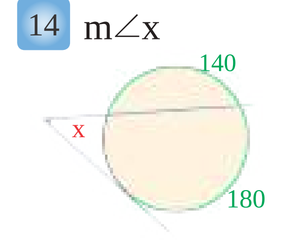
تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد قياس كل مما يأتي:

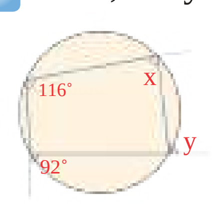
13 $m\angle HBC$



14 $m\angle x$

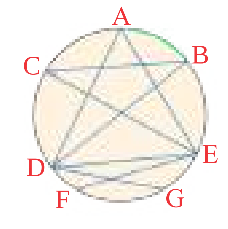


15 

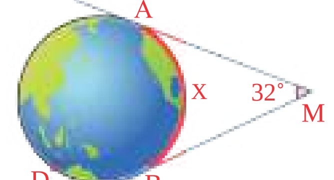


تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

16 زجاج: رسم احد الفنانين الرسم المجاور على زجاج، جد قياس $\angle ADE$ اذا علمت ان $\angle BCE = 30°$ وقياس $\widehat{AB} = 42$.



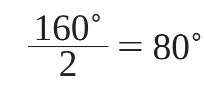
17 فضاء: قمر صناعي يدور حول الارض عندما يصل النقطة M يكون على ارتفاع 14000km فوق الارض، ما قياس القوس الذي يمكن رؤيته من كاميرا القمر الصناعي على الارض؟



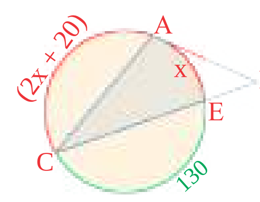
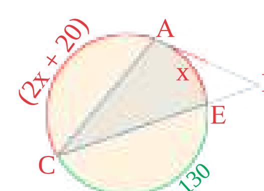
فكِّرْ

18 **أكتشف الخطأ:** كتب سعيد

$m\angle CAB$



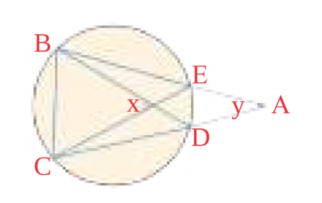
بين الخطأ وجد الجواب الصحيح

19 **حس عددي:** جد قيمة الزوايا المجهولة:

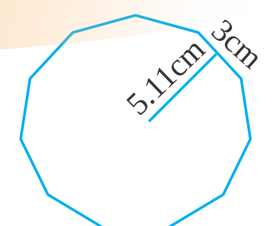
أكتب

مبرهنات الزوايا الداخلية والخارجية لتقارن بين الزاويتين x ,y .



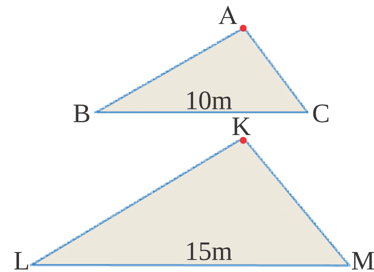
اختبار الفصل

Chapter Test

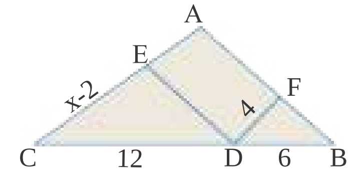
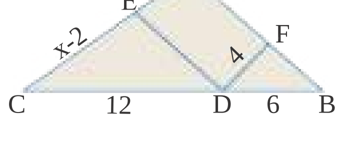


1 جد مساحة ومحيط مضلع منتظم اذا اعطيت المعلومات في الشكل المجاور.

2 جد المساحة السطحية والحجم للمخروط اذا علمت ان مساحة قاعدته $9\pi cm^2$ وارتفاعه الجانبي 5cm.



3 المثلثان ABC,KLM متشابهان، مساحة المثلث ABC تساوي $24m^2$ ما مساحة المثلث KLM؟

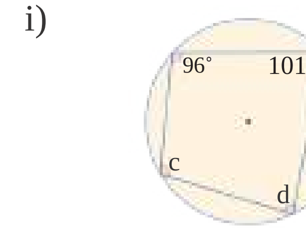



4 بيِّن ان المثلثين ABC, FBD في الشكل المجاور متشابهان، حيث ان:

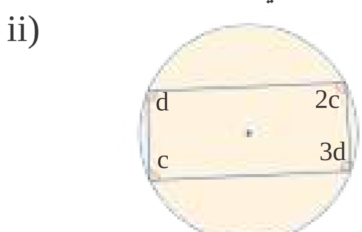
$\overline{AC} \parallel \overline{FD}$ ، وجد قيمة x.

5 **جد قياس الزوايا المجهولة في الاشكال الآتية:**

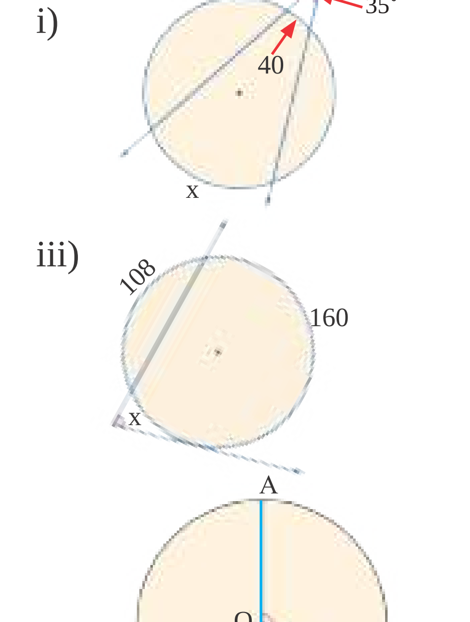
i)

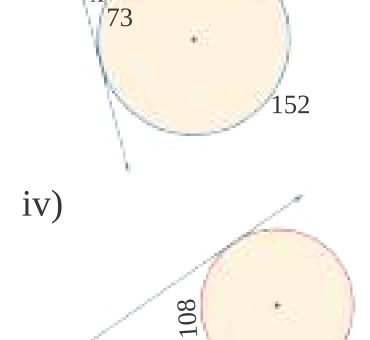


ii)



6 **جد قيمة x في كل مما يأتي:**





7 **جد قياس الزوايا والاقواس المجهولة في الشكل المجاور.**

A
O
35°
20°
C
E B D

i) $m\angle AOC$ ii) $m\,\widehat{DC}$

iii) $m\,\widehat{DB}$ iv) $m\angle DOA$

الفصلُ 6

الاحصاء والاحتمالات

Statistics and Probabilities



الدرس 6-1	تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها
الدرس 6-2	البيانات والاحصاءات المضّللة
الدرس 6-3	التباديل و التوافيق
الدرس 6-4	الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري
الدرس 6-5	الاحداث المركبة

تتحقق مصانع السيارات عادة قبل طرح انتاجها في الاسواق من عدة أمور لضمان الجودة، منها متانة محرك السيارة، جودة كهربائيات السيارة، الالوان والامور التصميمية كمصابيح السيارة وغير ذلك.

الاختبارُ القبليّ

جد الوسط الحسابي و الوسيط و المنوال والمدى لكل مما يأتي :

1 9,6,8,5,5,8,7,6,9,7

2 20,17,42,26,27,12,13

3 8,7,5,8,2,8,9,1,4,3,3,5

4 مثّل البيانات التالية بالنقاط ثم جد الوسط الحسابي والوسيط و المنوال والمدى:

0,2,5,3,1,4,5,3,4,3

اكتب كل كسر كنسبة مئوية:

5 $\frac{1}{4}$ 6 $\frac{13}{20}$ 7 $\frac{27}{100}$ 8 $\frac{3}{25}$

9 **صندوق فيه 5 كرات حمر، 3 كرات بيض، جد احتمال سحب.**

i) كرة حمراء واحدة.

ii) كرة بيضاء بعد اعادة الكرة الحمراء الى الصندوق.

iii) كرة بيضاء في حالة عدم اعادة الكرة الحمراء الى الصندوق.

10 **a, b حدثان متتامان، جد:**

i) $P(a)$ اذا كان $P(b) = \frac{2}{7}$

ii) $P(a), P(b)$ اذا كان $P(a)$ ثلاثة امثال $P(b)$.

حدّد ان كان الحدثان مستقلين او مترابطين .

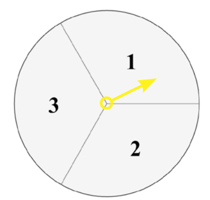
11 ظهور كتابة بعد رمي قطعة نقود و ظهور الصورة بعد الرمية الثانية.

12 سحب كرة صفراء، ثم كرة الحمراء من دون اعادة، من كيس فيه 3 كرات صفر، 5 كرات حمر.

13 ظهور العدد 5 بعد رمي حجر النرد وظهور العدد 6 بعد رمية النرد الثانية.

14 سحب بطاقة عليها اسم جمانة من كيس من دون اعادتها، ثم سحب بطاقة عليها اسم سالي من الكيس نفسه.

15 وقوف مؤشر القرص على العدد 3، وظهور العدد 3 عند رمي حجر النرد مرة واحدة.



16 ثلاث بطاقات تحمل الاحرف A B C بكم طريقة يمكن ترتيب البطاقات على خط مستقيم.

الدرسُ]6-1[تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

Design a Survey Study and Analysis its Results

فكرةُ الدرس

• تصميم دراسة مسحية

• تحليل النتائج

المفردات

• دراسة مسحية

• المجتمع

• العينة



يعد معمل النجف لصناعة البدلات الرجالية من الصروح المهمة في الصناعة الوطنية حيث يحرص المعنيون على تحقيق امور لضمان جودة المنتج. وذلك من خلال فحص نوع القماش، والالوان والتصاميم الحديثة و غيرها. ان فحص كل المنتج ستكون عملية غير منطقية لذا يفحص عدد محدود من تلك البدلات بدلاً من ذلك. ليستنتج ان المنتج قد يحتاج الى تطوير.



]6-1-1[تصميم دراسة مسحية Design a Survey Study

العينة: هي مجموعة جزئية من المجتمع . ومن خلال تحليل نتائج العينة يمكن التوصل الى استنتاجات حول المجتمع كاملاً . تكون الاستنتاجات اكثر تمثيلا للمجتمع في اي من الحالتين:

- حجم العينة اكبر.
- استعمال عينات اكثر.

ولنوع العينة تاثير في الاستنتاجات التي يتوصل اليها و هي على نوعين:

العينة المتحيزة: اذا كان لكل فرد منها الاحتمال نفسه في الاختيار.

العينة غير المتحيزة: اذا كان لافرادها احتمالات مختلفة في الاختيار.

مثال (1) **وزع مدير مدرسة 100 ورقة استبانة على طلاب مدرسته للتعرف الى جودة المواد الغذائية في حانوت المدرسة.**

i) حدِّد العينة والمجتمع الذي اختير منه.

ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله المدير.

iii) حدِّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.

i) العينة: الطلاب الذين تسلموا الاستبيانات وعددهم 100 طالب

المجتمع : جميع طلاب المدرسة

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية، اذ تؤخذ البيانات من اجابات افراد العينة نحو الاستبانة

iii) العينة غير متحيزة: لان هذه العينة تتكون من طلاب اختيروا عشوائياً

مثال (2) **يريد صاحب متجر ان يقدم هدية لكل زبون يتسوق من متجره. فوقف عند باب المتجر وسأل 20 متسوقاً عن نوع الهدية التي يود ان تُقدم له.**

i) حدِّد العينة و المجتمع الذي اختاره صاحب المتجر .

ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المتجر.

iii) حدِّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.

i) العينة: المتسوقون الذين سألوا وعددهم 20 متسوقاً.

المجتمع: المتسوقون الذين دخلوا المتجر.

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية، اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة .

iii) العينة غير متحيزة، لان الاشخاص الذين دخلوا المتجر اختيروا عشوائياً.

مثال (3) **سُئل 10 اشخاص دخلوا مطعم كباب عن الاكلات التي يفضلونها.**

i) حدِّد العينة والمجتمع الذي اختاره صاحب المطعم.

ii) صف اسلوب جمع البيانات الذي استعمله صاحب المطعم.

iii) حدِّد اذا كانت العينة متحيزة ام غير متحيزة.

i) العينة : الاشخاص العشرة الذين دخلوا المطعم.

المجتمع: جميع الاشخاص الذين دخلوا المطعم.

ii) اسلوب جمع البيانات هو دراسة مسحية اذ تؤخذ الاجابات من افراد العينة المختارة.

iii) العينة متحيزة، لان الاكلة المفضلة للاشخاص الموجودين في مطعم الكباب هي الكباب.

[6-1-2] تحليل النتائج Analysis of the Results

بعد جمع البيانات من خلال الدراسة المسحية تلخص البيانات كي تكون ذات معنى وذلك عن طريق استعمال مقاييس النزعة المركزية (الوسط الحسابي، الوسيط، المنوال) والتي دُرست سابقاً، بطرائق مختلفة واختيار المقياس الأنسب لتمثيل البيانات.

النوع	متى يفضل استعماله
الوسط الحسابي	عندما لاتوجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات.
الوسيط	عندما توجد قيم متطرفة في مجموعة البيانات، ولكن لاتوجد فجوات كبيرة في وسط البيانات.
المنوال	عندما يوجد اعداد متكررة في مجموعة البيانات.

مثال (4) **اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات في كل مما يأتي:**

i) البيانات المجاورة تبين اوزان 10 صناديق بالكيلو غرام : 3, 2,3,6,5,5,21,4,3,5

الوسط الحسابي: غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود قيمة كبيرة متطرفة هي: 21 تؤثر في قيمة الوسط الحسابي.

المنوال: غير مناسب لتمثيل البيانات لوجود اكثر من منوال هما : 3,5

الوسيط: هو المقياس الأنسب لتمثيل هذه البيانات لعدم وجود فجوة كبيرة في وسط البيانات 2,3,3,3,4,5,5,5,6,21

ii) حصل محمد على الدرجات التالية في خمسة اختيارات في مادة الرياضيات : 90,93,85,86,91

الوسط الحسابي $\frac{90+93+85+86+91}{5} = \frac{445}{5} = 89$

الوسط الحسابي: 89 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لعدم وجود قيمة متطرفة.

الوسيط: 90 هو مقياس مناسب لتمثيل البيانات لانه يتوسط البيانات ولا يوجد فجوة كبيرة في وسط البيانات

لذا كلاهما مقياس مناسب لتمثيل البيانات. المنوال: لا يوجد لعدم وجود تكرار في البيانات.

تأكّدْ من فهمِكَ **حدّد العينة و المجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميّز العينة المتحيزة عن العينة غير متحيزة في كل مما يلي، فسِّر اجابتك:**

1 دخل 30 شخص مكتبة عامة وسئل كل سادس شخص يدخل المكتبة عن هوايته المفضلة.

2 وزعت 100 استبانة على مجموعة من عمال احد المصانع تتضمن سؤالاً حول ظروف العمل في المعمل.

3 وزعت الحيوانات في احدى حدائق الحيوانات، ثم اختير حيوان من كل مجموعة بصورة عشوائية لاجراء فحوصات علية.

اي مقاييس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لوصف البيانات التالية ؟ فسِّر اجابتك .

4 8 , 10 , 14 , 8 , 13 ,6

5 8 , 10 , 8, 9, 11, 4, 6, 54

6 8, 9, 8, 6, 10, 9 ,11, 13, 14, 8, 6, 7, 19

تدربْ وحلّ التمرينات **حدّد العينة والمجتمع ثم صف اسلوب جمع البيانات وميّز العينة المتحيزة من العينة غير متحيزة في كل مما يلي، فسِّر اجابتك.**

7 يريد صاحب معمل التحقق من ان العمال يعملون بشكل جيد، فراقب احد العمال مدة ساعتين.

8 يقف عدد من الطالبات عند مدخل المدرسة ويسألن كل عاشر طالبة تدخل المدرسة عن هوايتها المفضلة.

اي مقياس النزعة المركزية (ان وجدت) هو الأنسب لتمثيل البيانات التالية ؟ فسِّر اجابتك.

9 34,47,41,49,39,26,40

10 6,2,4,4,3,2,6,2,4,4,20

11 5,3,5,8,5,3,6,7,4,5

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



مستشفى: يعد مستشفى مدينة الطب مجمعاً طبياً متكاملاً، يقدم خدمات للمواطنين في بغداد و المحافظات، في ندوة تعريفية يتم اختيار طبيب من كل قسم عشوائياً ليقدم نبذة عن خدمات قسمه في المستشفى.

12 صف العينة و المجتمع.

13 هل العينة متحيزة ام لا ؟ فسِّر ذلك.

14 **تسوق:** يبيّن الجدول ادناه عدد الزبائن الذين يرتادون محل لبيع الاجهزة الكهربائية في كل ساعة في احد الايام . أي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات.

عدد الزبائن			
86	86	71	79
86	79	32	88
70	82	69	71
86	86	81	85

15 **تغذية:** يبيّن الجدول ادناه السعرات الحرارية لبعض الخضروات في طبق لكل نوع، اي مقاييس النزعة المركزية هو الأنسب لوصف البيانات.

الخضروات	السعرات	الخضروات	السعرات
بصل	16	خيار	13
فلفل	20	ذره	66
ملفوف	17	سبانخ	9
جزر	28	كوسا	17



فَكِّرْ

16 تحدٍّ: اوجد مجموعة من الاعداد يكون وسيطها اصغر من وسطها الحسابي.

17 أُصحِّحُ الخطأ: تقول سناريا ان الوسط الحسابي هو انسب مقاييس النزعة المركزية لتمثيل البيانات 20,8,4,5,3 حدد خطأ سناريا وصححه .

18 حس عددي: في دراسة مسحية حول الدوام في مدرسة ثانوية، وزعت استبانة على 50 طالباً، فكانت نسبة 74٪ من الطلاب يفضلون الدوام الصباحي. هل هذه الدراسة موثوق بها؟ بيِّن ذلك.

أُكتبْ

سؤالاً عن معنى تريد اجابته من خلال دراسة مسحية.

الدرسُ]6-2[البيانات والإحصاءات المضلّلة Data and Misleading Statistic

فكرةُ الدرس
- تميز البيانات المضلّلة
- تميز الإحصاءات المضلّلة

المفردات
- البيانات المضلّلة
- الإحصاءات المضلّلة

تعلم

غالباً ما نلاحظ على واجهات المحال التجارية اعلانات تنزيلات نهاية الموسم لسلع معينة تُرغب الناظر من دخول المحل والتبضع منه.

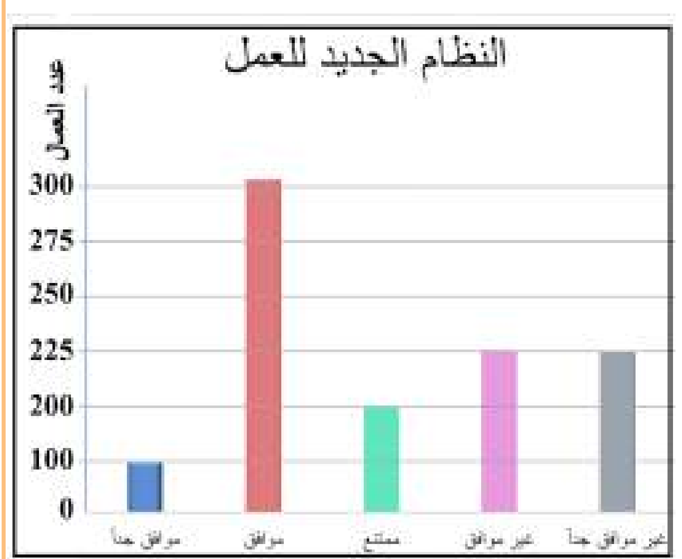


]6-2-1[تمييز البيانات المضلّلة Discrimination Misleading Data

البيانات المضلّلة: هي البيانات التي تبرز صفة معينة لسلعة على نحو مبالغ فيه وعرض الحقائق بشكل يولد لدى الناظر انطباعاً يروق لصاحب الاعلان وتضلل المستهلك.

مثال (1) يفكر صاحب مصنع تطبيق نظام جديد في العمل، فوزع استبانة على العمال يسألهم عن رأيهم في النظام الجديد.

هل التمثيل بالاعمدة المجاور يعطي الصورة الصحيحة حول نتائج الاستبانة؟



يبدو للوهلة الاولى ان معظم العمال موافقون على تطبيق النظام الجديد، مع العلم ان اطوال المدة الزمنية للتدريج غير ثابتة.

لاحظ ان: 450 عامل غير موافقين او غير موافقين جداً على هذا النظام الجديد، في حين ان عدد الموافقين يزيد قليلاً على 300 عامل فقط، وعليه فأن التمثيل البياني المعروض مضلّل، والاستنتاج غير صادق.

ملاحظة: (الرسم البياني قد يكون مضلّلاً، بإطالة او تقصير الفترات بين قيم البيانات، وذلك لاعطاء انطباع معين).

مثال (2) الرسم البياني المجاور يوضح العلاقة بين طولي القرش البيضاء الكبيرة وطول سمكة القرش ماكو.
بيّن هل الرسم البياني مضلّل؟ وضح ذلك.



من الشكل المجاور، نلاحظ ان طول العمود العلوي ضعف طول العمود السفلي.

ولكن القيمة المناظرة لطول العمود العلوي هي 4.9 والقيمة المناظرة لطول العمود السفلي هي 4 وبالتأكيد قيمة 4.9 ليست ضعف 4، وعليه الرسم البياني المجاور مضلّل.

ملاحظة: (عندما يبدأ الرسم البياني من الصفر، يصبح الرسم غير مضلّل.)

[6-2-2] تمييز الإحصاءات المضلّلة Discrimination Misleading Statistics

الإحصاءات المضلّلة: بالاضافة الى الرسوم المضلّلة تستعمل الإحصاءات المضلّلة بهدف الترويج لشركة او بضاعة معينة، بانعام النظر جيداً في معطيات الاعلان يمكن تمييز الإحصاءات المضلّلة.

مثال (3) وضع صاحب محل للملابس الرجالية الاعلان الآتي:
(بدلات رجالية جديدة متوسط السعر 45 الف دينار)



في المحل 5 نماذج من البدلات اسعارها بالالاف:

$$54, 50, 20, 48, 53$$

$$\frac{54+50+20+48+53}{5} = 45$$

لاحظ ان متوسط اسعار البدلات الخمس 45 الف دينار، الا ان بدلة واحدة فقط سعرها 20 الف دينار.
حيث يقل سعرها عن هذا المتوسط. وهذا يجعل الزبون يدفع اكثر من هذا السعر ثمناً للبدلة.

مثال (4) في استطلاع على 800 طالب اعدادية، افاد 70 منهم انهم يرغبون دخول كلية الهندسة فيما قال 50 منهم، بانهم يرغبون في دخول كلية الطب، جاء في نتائج الاستطلاع ان الطلاب يفضلون الهندسة على الطب.



ان مجموع الطلاب الذين شملهم الاستطلاع فعلاً هو 120=(50+70) طالباً
من اصل 800 طالب، اي ان العينة العشوائية كانت صغيرة جداً
النسبة المئوية للطلاب الذين شملهم الاستطلاع تساوي $\frac{120}{800} \times 100$
وتساوي 15٪.

تأكَّدْ من فهمِكَ

وضح كيف يمكن ان يُولّد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعاً مضلّلاً :

1



2



فسِّر لماذا الإحصاءات التالية مضلّلة:

3 عُرض مقال على 20 شخصاً لتقويمه، أبدى 13 منهم اعجابهم بالمقال، بناءً على ذلكَ صرح صاحب المقال: بأن المقال صالح للنشر لان نسبة الذين فضلوه كانت 13 الى 7.

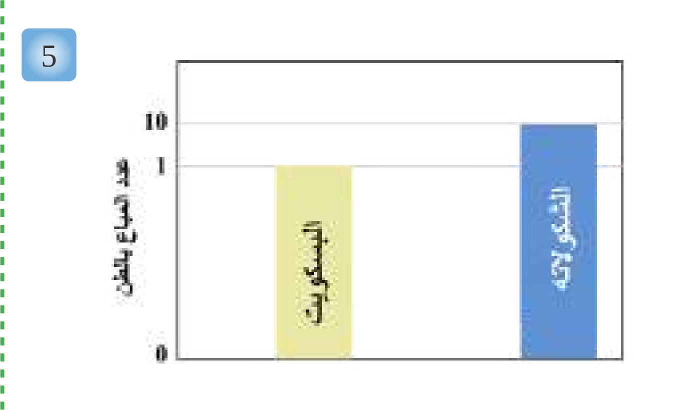
4 باع مخزن ملابس رياضية لمدة زمنية معينة 320 بدلة رياضية، في حين باع مخزن لبيع الالعاب والملابس الرياضية وللمدة نفسها 90 بدلة رياضية.



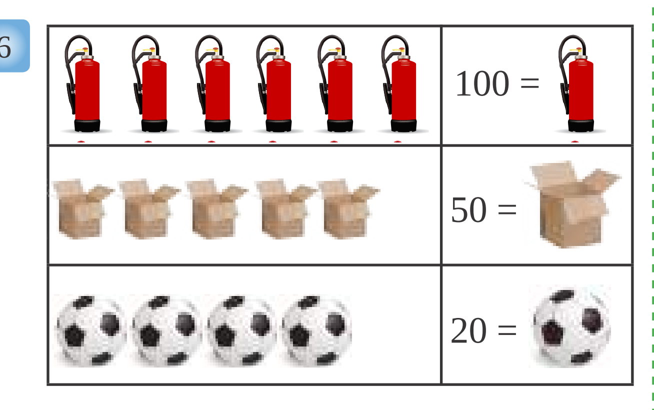
تدربْ وحلّ التمريناتِ

وضح كيف يمكن ان يولد كل من الرسمين البيانيين التاليين انطباعاً مضلّلاً.

5



6



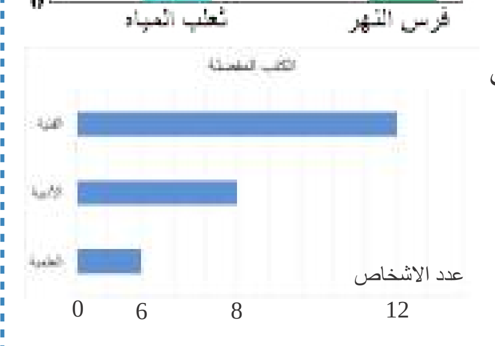
7 في استطلاع شمل 6 اشخاص حول مطالعة جريدة يومية، افاد 4 منهم انهم يفضلون الجريدة (X) في نهاية الاستطلاع وردت الجملة الآتية:

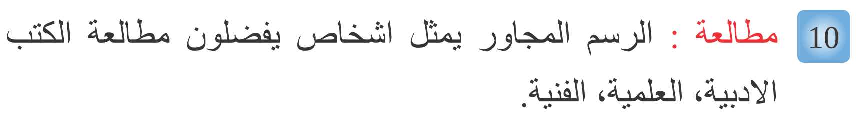
يفضل 2 من كل 3 اشخاص مطالعة الجريدة (X) لماذا يُعد هذا الاعلان مضلّلاً؟

8 سئل 100 طالب عن الطريقة التي يفضلونها في القدوم الى المدرسة، فكانت إجابات 60 طالباً منهم على النحو الآتي: 32 منهم يفضلون القدوم بواسطة سيارة الاجرة و 18 يفضلون المشي و 10 طلاب يفضلون القدوم بسياراتهم الخاصة. أستنتج ان نصف الطلاب يفضلون سيارة الأجرة. فسِّر لماذا الإحصاءات مضلّلة؟

تدربْ وحلّ مسائل حياتيةً

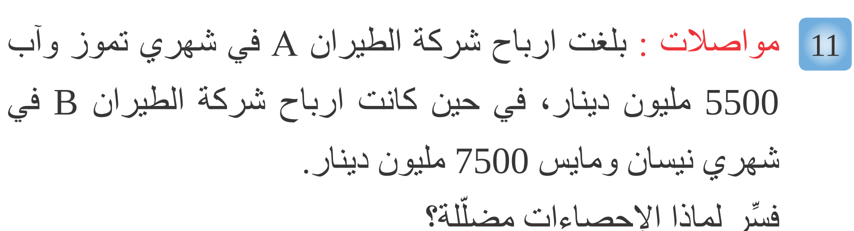
9 الاحياء : الرسم البياني المجاور يمثل القدرة على كتم النفس لفرس النهر وثعلب المياه.
لماذا البيانات في الرسم مضلّلة؟ وضح ذلك.





10 مطالعة : الرسم المجاور يمثل اشخاص يفضلون مطالعة الكتب الادبية، العلمية، الفنية.
فسِّر لماذا البيانات في الرسم مضلّلة؟





11 مواصلات : بلغت ارباح شركة الطيران A في شهري تموز وآب 5500 مليون دينار، في حين كانت ارباح شركة الطيران B في شهري نيسان ومايس 7500 مليون دينار.
فسِّر لماذا الإحصاءات مضلّلة؟



12 تغذية : تحتوي قصبة البروكلي على 477mg من البوتاسيوم والجزرة الكبيرة 230mg من البوتاسيوم في حين يحتوي رأس القرنبيط على 803mg من البوتاسيوم. فسِّر لماذا الإحصاءات هذه مضلّلة؟

فكِّرْ

13 اكتشف الخطأ: يقول محمد ان الرسم يكون غير مضلّل اذا بدأ رسم الاعمدة من الصفر بصرف النظر عن ثبوت طول الفترات. اكتشف خطأ محمد.

14 حس عددي: حصل احد الباعة على العمولات التالية بالالاف الدنانير:
شباط 965، اذار 170، نيسان 120، تموز 125، مايس 100.
اخبر اصدقاؤه ان متوسط عمولته الشهرية 265 الف دينار. فسِّر لماذا هذا الاحصاء مضلّل؟

15 ما الذي يجب ان تتأكد منه لتقرر ما اذا كان الرسم البياني مضلّلاً ام لا؟

أكتبْ

سؤال من الحياة اليومية تحتاج اليه لعمل رسوم مضلّلة.

الدرس [6-3] التباديل والتوافيق Permutations and Combinations

فكرةُ الدرس
- تعرف مضروب العدد الصحيح غير السالب.
- تعرف مفهوم التباديل.
- تعرف مفهوم التوافيق.

المفردات
- مضروب العدد.
- التباديل.
- التوافيق.
- فضاء العينة .

تعلم

دخل 4 اشخاص الى غرفة تحتوي على 4 كراسي في صف واحد وطلب منهم الجلوس على تلك الكراسي.
فكم طريقة يمكن ان يجلسون؟



[6-3-1] المضروب Factorial

اذا كان n عدداً صحيحاً غير سالب فأن: مضروب العدد n يرمز له !n ويعرف بالعلاقة الآتية:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(3)(2)(1), \quad n \in Z^{+}$$

وان: $1! = 1,\ 0! = 1$

مثال (1) دخل 4 اشخاص الى غرفة تحتوي صفاً من 4 كراسي وطلب اليهم الجلوس على تلك الكراسي. كم طريقة يمكن ان يجلسون؟



* الشخص الاول الذي دخل الى الغرفة يمكن ان يجلس على اي كرسي، اي له: 4 اختيارات.
* الشخص الثاني يحق له ان يجلس على اي كرسي من الثلاثة الباقية، اي له: 3 اختيارات.
* الشخص الثالث يحق له ان يجلس على اي كرسي من الكرسيين الباقيين، اي له: 2 اختيار.
* اما الشخص الرابع فانه حتماً سيجلس على الكرسي الاخير، اي له: 1 اختيار.

اذن عدد طرق الجلوس الممكنة تساوي: $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

لاحظ انك حصلت على النتيجة السابقة بضرب اعداد متتالية تبدأ من العدد (4) وتتناقص حتى تصل الى العدد (1).

تسمى مثل هذه الصورة مضروب العدد (4) ويرمز لها بالرمز !4

مثال (2) جد قيمة كل مما يأتي:

i) $5!$ ii) $4! - 2!$ iii) $\frac{7!}{5!}$ iv) $3! \times 2!$ v) $\frac{(6-2)!}{0!}$ vi) $\frac{6!}{3 \times 6}$

i) $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$

ii) $4! - 2! = (4)(3)(2)(1) - (2)(1) = 24 - 2 = 22$

iii) $\frac{7!}{5!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(5)(4)(3)(2)(1)} = (7)(6) = 42$

iv) $3! \times 2! = ((3)(2)(1))((2)(1)) = (6)(2) = 12$

v) $\frac{(6-2)!}{0!} = \frac{(4!)}{0!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{1} = 24$

vi) $\frac{6!}{3 \times 6} = \frac{(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{3 \times 6} = 40$

[6-3-2] التباديل Permutations

كم زوج مرتب يمكن تكوينه من الاحرف a, b, c ؟ باستعمال قاعدة الشجرة

$$a<^{b}_{c} \qquad b<^{a}_{c} \qquad c<^{a}_{b} \implies (a,b),(a,c),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b)$$

هناك ستة ازواج مرتبة و هذا يعطي فكرة مبسطة عن التباديل التي سندرسها لاحقاً.
عدد التباديل لعناصر عددها n مأخوذة r في كل مرة هو ناتج قسمة n! على (n-r)!، يرمز للتباديل بالرمز P^n_r او $P(n,r)$ حيث

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ; \quad 0 \le r \le n$$

لاحظ ان $P^n_0 = 1, P^n_1 = n, P^n_n = n!$

مثال (3) جد قيمة كل مما يأتي:

i) P^7_2 ii) P^3_3 iii) P^9_1 iv) P^{10}_0

i) $P^7_2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{(7)(6)(5)(4)(3)(2)(1)}{(5)(4)(3)(2)(1)} = 42$

او بطريقة ابسط بجعل $7! = (7)(6)(5!)$

$$P^7_2 = \frac{7!}{(7-2)!} = \frac{7!}{5!} = \frac{(7)(6)(5!)}{5!} = (7)(6) = 42$$

الفرع ii,iii,iv من تطبيق الملاحظة مباشرة

ii) $P^3_3 = 3! = (3)(2)(1) = 6$ iii) $P^9_1 = 9$ iv) $P^{10}_0 = 1$

مثال (4)

لوحة ارقام: لعمل لوحات ارقام مكونة من خمسة ارقام من بين الارقام 1 الى 9. ماعدد الترتيبات المختلفة الممكنة؟

بما ان ترتيب الارقام مهم فهذه الحالة تمثل تباديل.

كتابة قانون التباديل

$$P^n_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

بالتعويض من $r = 5, n = 9$

$$P^9_5 = \frac{9!}{(9-5)!}$$

نبسط

$$P^9_5 = \frac{9!}{4!}$$

قسمة العوامل المشتركة

$$= \frac{(9)(8)(7)(6)(5)(4!)}{4!}$$

بسط

$$= 15120$$

اذن هناك 15120 ترتيباً

[6-3-3] التوافيق Combinations

كم مجموعة يمكن تكوينها من الاحرف a, b, c ؟
بما ان المجموعات غير خاضعة للترتيب اذن هناك ثلاث مجموعات هي:

$$\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\}$$

و هذا يعطي فكرة مبسطة على التوافيق والتي سندرسها لاحقاً.

عدد التوافيق لعناصر عددها n مأخوذة r في كل مرة يساوي ناتج قسمة n! على (n-r)!r! ، يرمز للتوافيق بالرمز C^n_r او $\binom{n}{r}$.

$$\binom{n}{r} = C^n_r = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad , \quad 0 \le r \le n$$

ملاحظة: لاحظ ان: $C^n_0 = 1 \; , \; C^n_1 = n \; , \; C^n_n = 1$

في التوافيق لايهم الترتيب

مثال (5) جد قيمة كل مما يأتي:

i) C_2^8 ii) C_{12}^{12} iii) C_1^9 iv) C_0^{50}

كتابة قانون التوافيق

$$i)\ C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

بالتعويض من $r = 2 , n = 8$

$$C_2^8 = \frac{8!}{(8-2)!2!} = \frac{8!}{6!2!}$$

فك المضروب و التبسيط

$$= \frac{(8)(7)(6!)}{6!(2)(1)} = 28$$

بحسب الملاحظة:

ii) $C_{17}^{17} = 1$ iii) $C_1^9 = 9$ iv) $C_0^{50} = 1$

مثال (6) وظائف: أعلنت شركة عن 4 وظائف شاغرة، فتقدم 10 اشخاص، بكم طريقة يمكن شغل الوظائف الأربع؟

بما ان ترتيب الوظائف غير مهم فهذه الحالة تمثل توافيق.

كتابة قانون التوافيق

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

بالتعويض من $r = 4 , n = 10$

$$C_4^{10} = \frac{10!}{(10-4)!4!}$$

$$C_4^{10} = \frac{10!}{6!4!}$$

فك المضروب و التبسيط

$$= \frac{(10)(9)(8)(7)(6!)}{(6!)(4)(3)(2)(1)}$$

$$= 210$$

اذن هناك 210 طريقة لشغل الوظائف الأربع.

تأكَّدْ من فهمِكَ

جد قيمة كل مما يأتي:

1. $4! \times 2!$
2. $(3+2)!$
3. $\frac{9!}{6!}$
4. $(7-5)!$
5. $3! + 2!$
6. P_8^8
7. P_4^{10}
8. C_3^8
9. $\binom{9}{0}$

تدربْ وحلّ التمريناتِ

جد قيمة كل مما يأتي:

10. $2! \times 6!$
11. $4! \times 3!$
12. $0! \times 1!$
13. P_0^{10}
14. $\binom{10}{1}$
15. C_5^9
16. P_3^7
17. P_1^{15}
18. C_{100}^{100}

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

19 **لجان:** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية من بين هيئة مكونة من 5 شخصاً؟

20 **لجان:** بكم طريقة يمكن اختيار لجنة ثلاثية مكونة من رئيس ونائب الرئيس وامين الصندوق من بين هيئة مكونة من 5 شخصاً؟



21 **لوحات:** رسم فنان 7 لوحات فنية، فبكم طريقة يمكنه اختيار 5 لوحات منها لعرضها في معرض فني؟



22 **اختبار:** ورقة اسئلة تحتوي على 12 سؤالاً والمطلوب الاجابة عن 10 اسئلة. بكم طريقة يمكن اختيار الاسئلة؟

فَكِّرْ

23 **تحد:** **جد قيمة:**

i) $\dfrac{15!\ \ 9!}{14!\ 10!}$ ii) $\dfrac{5!}{3! \times 1!} \times \dfrac{6!}{5! \times 4!}$

24 أيهما صحيح؟ : اختيار لجنة من 4 طلاب من مجموعة 7 طلاب، فان عدد الاختيارات اما P_4^7 ام C_4^7 فسِّر اجابتك.

25 تبرير: متى تكون العبارة $C_r^n = P_r^m$ ؟

26 تفكير ناقد: ما العلاقة بين تراتيب 3 من اصل 5، وتوافيق 3 من اصل 5؟ اكتب هذه العلاقة. من خلال حسابك لكل منهما.

27 مسألة عددية: جد قيمة n التي تجعل $\dfrac{n!}{(n-1)!} = 9$

أكتبْ

مسألة لاختيار 2 من بين 5 اشياء على ان يكون الترتيب فيها مهماً.

الدرسُ]6-4[الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

Experimental Probability and Theoretical Probability

فكرةُ الدرس
- حساب الاحتمال التجريبي.
- حساب الاحتمال النظري.

المفردات
- الاحتمال التجريبي.
- الاحتمال النظري.
- فضاء العينة .

تعلم

رمى مهند قطعتي نقود 13 مرة وسجل النتائج كما مبين في الجدول المجاور:

التكرار	النتائج
7	H,H
3	H,T
1	T,H
2	T,T

1. اوجد النسبة $\frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}}$

2. اوجد النسبة $\frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد مرات التجربة}}$

هل النسبة في السؤال الاول تساوي النسبة في السؤال الثاني ؟ وضح ذلك.

]6-4-1[الاحتمال التجريبي والاحتمال النظري

Experimental Probability and Theoretical Probability

سبق ان درست حساب الاحتمال التجريبي والنظري حيث تحديد الاحتمال في الفقرة (تعلم) عن طريق اجراء التجربة والنواتج بهذه الطريقة تسمى الاحتمالات التجريبية .

اما الاحتمالات المبنية على حقائق وخصائص معروفة فتسمى الاحتمالات النظرية

مثال (1) فضاء العينة لتجربة رمي قطعتي نقود هي :

$$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

النسبة في السؤال الاول:

اذن عدد عناصر فضاء العينة يساوي 4

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H,T يساوي 3

الاحتمال نظري

$$P(H,T) = \frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} \Rightarrow \therefore P(H,T) = \frac{3}{4}$$

النسبة في السؤال الثاني:

من الجدول عدد مرات ظهور الحدث H,T يساوي 3

عدد مرات التجربة يساوي 13

الاحتمال تجريبي

$$P(H,T) = \frac{\text{عدد ظهور (H,T)}}{\text{عدد مرات التجربة}} \Rightarrow \therefore P(H,T) = \frac{3}{13}$$

الاحتمالات النظرية تزودنا بنتائج التجربة من دون الحاجة الى إجرائها (تعتمد على فضاء العينة للتجربة).

الاحتمالات التجريبية تزودنا بنتائج التجربة بتكرارها عدة مرات (تعتمد على تكرار التجربة).

مثال (2) وجد باحث في مصنع بطاريات السيارات ان احتمال كون البطارية غير صالحة هو $\frac{3}{20}$ أنظري هذا الاحتمال ام تجريبي؟ واذا اراد المصنع الحصول على 240 بطارية غير صالحة. فكم بطارية كان على المصنع انتاجه ؟

هذا الاحتمال تجريبي، لانه يعتمد على ما حدث فعلاً. استعمل التناسب لحل الجزء الثاني من المثال

كل 3 بطاريات من اصل 20 غير صالحة

اذن 240 بطارية غير صالحة من اصل X بطارية ينتجها المصنع.

$$\frac{3}{20} = \frac{240}{X}$$ اكتب التناسب

$$3X = 4800$$ الضرب التبادلي

$$X = \frac{4800}{3}$$ اقسم المعادلة على 3

$$X = 1600$$

$\therefore$ يجب ان ينتج المصنع 1600 بطارية

مثال (3) عند رمي حجري النرد مرة واحدة جد احتمال :



i) الحدث: الحصول على المجموع 5 على وجهي الحجرين.

ii) الحدث : الرقم على وجه الحجر الاول ضعف الرقم على وجه الحجر الثاني.

هذا الاحتمال نظري : لان الحجرين رميا مرة واحدة.

عدد ارقام الحجر الاول = 6 ، عدد ارقام الحجر الثاني = 6

اذن بحسب قانون العد الاساسي : عدد عناصر فضاء العينة تساوي 6×6 وتساوي 36

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (1,1).......(1,6) \\ (2,1).......(2,6) \\ . \\ (6,1).......(6,6) \end{array} \right\} \qquad n = 36$$

الحدث: مجموع 5 على وجهي الحجرين

$i)\ E_1 = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}, m = 4, \quad n = 36$

قانون الاحتمال

$P(E_1) = \frac{m}{n}$

بالتعويض وبالتبسيط

$P(E_1) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

الحدث: رقم الحجر الاول ضعف رقم الحجر الثاني

$ii)\ E_2 = \{(2,1),(4,2),(6,3)\}, m = 3, n = 36$

بالتعويض وبالتبسيط

$\therefore P(E_2) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

[6-4-2] الاحداث المتنافية Disjoint Events

الحدثان المتنافيان: هما حدثان لايمكن ان يتحققا معاً في تجربة واحدة.

مثلاً: عند رمي حجر النرد مرة واحدة، فان الحصول على عدد فردي و عدد زوجي معاً مستحيل

اذن هما حدثان متنافيان.

حساب احتمال الحدثين المتنافيين:

اذا كان E_2 , E_1 حدثين متنافيين فان احتمال وقوع E_1 او وقوع E_2 يساوي مجموع احتمالي الحدثين

اي : $P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

مثال (4) عند رمي حجر النرد مرة واحدة، جد احتمال الحصول على العدد 3 او على عدد زوجي.

بما انه لايمكن ان يظهر على وجه الحجر العدد 3 في الوقت نفسه مع عدد زوجي فان هذين الحدثين متنافيان

فضاء العينة $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$

احتمال الحصول على العدد 3 هو

$P(E_1) = \frac{m}{n}, m = 1, n = 6 \Rightarrow P(E_1) = \frac{1}{6}$

احتمال الحصول على العدد زوجي

$P(E_2) = \frac{m}{n}, m = 3, n = 6 \Rightarrow P(E_2) = \frac{3}{6}$

احتمال الحوادث المتنافية

$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

بالتعويض وبالتبسيط

$P(E_1 \text{ or } E_2) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

اذن احتمال ظهور العدد 3 او عدد زوجي في رمي حجر النرد يساوي $\frac{2}{3}$

مثال (5) عند رمي حجري النرد مرة واحدة، جد احتمال الحصول على عددين متساويين او مجموع عددين يساوي 3.

عدد عناصر فضاء العينة عند رمي حجري النرد يساوي 36

$E_1 = \{(1,1), (2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$$P(E_1) = \frac{E_1 \text{ عدد عناصر}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{6}{36}$$

$E_2 = \{(1,2), (2,1)\}$

$$P(E_2) = \frac{E_2 \text{ عدد عناصر}}{\text{فضاء العينة}} = \frac{2}{36}$$

E_1 , E_2 حدثان متنافيان لاتوجد عناصر مشتركة بينهما.

احتمال الاحداث المتنافية

$P(E_1 \text{ or } E_2) = P(E_1)+P(E_2)$

بالتعويض وبالتبسيط

$$= \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

تأكَّدْ من فهمِكَ

في تجربة رمي حجري النرد مرة واحدة، جد احتمال حدوث الاحداث الاتية :

1. العددان على وجهي الحجرين متساويان.
2. العدد على وجه الحجر الاول نصف العدد على وجه الحجر الثاني.
3. مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 10.
4. مجموع العددين على وجهي الحجرين اقل من 5.
5. أتجريبية الاحتمالات السابقة ام نظرية؟
6. كيس فيه 4 كرات حمر، كرة خضراء، كم كرة زرقاء يجب ان تضاف الى الكيس كي يكون احتمال سحب كرة حمراء $\frac{2}{3}$ ؟ أنظري الاحتمال ام تجريبي ؟
7. وقف شخص في احدى تقاطعات مدينة بغداد فأحصى 25 سيارة شاهدها، منها 13 سيارة صفر اللون، 7 سيارات بيض اللون، 5 سيارات رصاصية اللون. قدِّر احتمال ان تكون السيارة الثالثة التي تجتاز التقاطع صفراء اللون . وما نوع الاحتمال أنظري ام تجريبي ؟ اكتب النسبة بشكل كسر عشري ونسبة مئوية .
8. عند رمي حجري نرد، جد احتمال حصول على عددين مجموعهما 5 او مجموعهما 11. هل الحدثان متنافيان بيِّن ذلك.

تدربْ وحلّ التمريناتِ

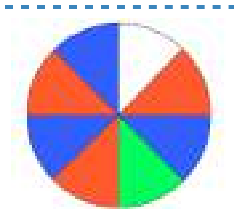
في تجربة رمي حجري النرد مرة واحدة، جد احتمال حدوث الاحداث الاتية :

9. مجموع العددين على وجهي الحجرين اكبر من 8.
10. مجموع العددين على وجهي الحجرين يساوي 12.

11 اجريت دراسة على 100 شخص، فاجاب 15 منهم انهم يستعملون اليد اليسرى فاذا اجريت الدراسة على 400 شخص، فكم تتوقع عدد الاشخاص الذين يستعملون اليد اليسرى ؟

12 جد احتمال سحب بطاقة تحمل عدداً فردياً او تحمل عدداً من مضاعفات العدد 2 من بطاقات مرقمة من 1 الى 9

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً



13 **تسلية :** بأي لون يجب تلوين الفراغ بحيث يكون احتمال ان يأتي المؤشر عند هذا اللون $\frac{1}{4}$؟

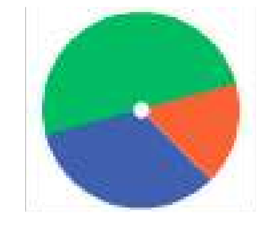
14 **طوابع :** يهوى مهند جمع الطوابع البريدية، فمن بين 60 طابعاً جمع 25 طابعاً للدول العربية، 15 طابعاً لدول افريقية و 20 طابعاً لدول اوربية. قدّر احتمال ان يكون الطابع الذي سيجمعه أوربياً.

15 **رياضية:** في التدريب على كرة السلة، اصاب لاعب السلة 15 كرة من 25 رمية، ما الاحتمال التجريبي لان يصيب لاعب السلة في الرمية التالية ؟ اكتب الجواب على صورة كسر و عدد عشري و نسبة مئوية .

16 **دراسة :** احصى رجل في عائلته 3 افراد عيونهم زرق من كل 22 فرداً، اذا رزق الرجل بمولود جديد، ما احتمال ان تكون عيناه ليست زرقاء ؟

فكِّرْ





17 **تحدٍّ:** قرص ذو مؤشر، مقسم على ثلاثة اجزاء في الشكل المجاور: نصف القرص اخضر ثلثه احمر و سدسه ازرق. ما احتمال ان يدل مؤشر القرص على الأخضر او الأحمر بعد اطلاقه؟



18 **أكتشف الخطأ:** يريد كل من سارة و مهند تحديد احتمال اختيار كرة زرقاء او حمراء عشوائياً من كيس يحتوي على 5 كرات زرق، 4 كرات حمر، 6 كرات صفر ايهما كانت اجابته صحيحة ؟ فسِّر اجابتك.

سارة	مهند
$P(R \text{ or } B) = P(R)+P(B) = \frac{4}{15} + \frac{5}{15} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$	$P(R \text{ or } B) = P(R) \times P(B) = \frac{4}{15} \times \frac{5}{15} = \frac{4}{45}$

أُكتبْ

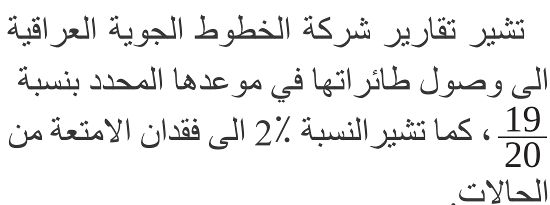
توضيحاً لما يمثله كل عدد في الكسر $\frac{2}{9}$ الذي يمثل احتمال وقوع حدث نظري او تجريبي.

فكرةُ الدرس
- حساب احتمال الاحداث المستقلة.
- حساب احتمال الاحداث المترابطة.

المفردات
- الاحداث المستقلة.
- الاحداث المترابطة.




تعلم



تشير تقارير شركة الخطوط الجوية العراقية الى وصول طائراتها في موعدها المحدد بنسبة $\frac{19}{20}$ ، كما تشير النسبة 2٪ الى فقدان الامتعة من الحالات.

فما احتمال وصول طائرة من موعدها وبدون فقدان امتعة؟

]6-5-1[الاحداث المستقلة Independent Events

سبق وان تعلمت مفهوم الاحداث المستقلة (نتيجة احدهما لا تؤثر في نتيجة الآخر) في هذا الدرس سوف نتعلم حساب احتمال الحوادث المستقلة، اذا كان: E_1,E_2 حدثين مستقلين فان احتمال وقوعهما معاً يساوي حاصل ضرب احتمال E_1 في احتمال الحدث E_2 ،

أي: $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

مثال (1) في فقرة تعلم:

ان احتمال وصول الطائرة في موعدها هو $P(E_1) = \frac{19}{20}$

ان احتمال فقدان الامتعة هو $P(E_2) = \frac{1}{50}$

ان وصول الطائرة في موعدها لايؤثر في فقدان الامتعة، هذا يعني ان الحدثين مستقلان.

احتمال الاحداث المستقلة $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

بالتعويض $= \frac{19}{20} \times \frac{1}{50}$

$= \frac{19}{1000} = 0.019 = 1.9\%$

مثال (2) كيس يحتوي على 3 كرات حمر، 4 كرات خضر، 5 كرات زرق، سحبت منه كرة عشوائياً ثم اعيدت وسحبت كرة ثانية. جد احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء.

سحب الكرة الحمراء $P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

سحب الكرة الخضراء $P(G) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

الحدثان مستقلان.

احتمال الاحداث المستقلة (لان الكرة الاولى اعيدت الى الكيس) $P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G)$

بالتعويض $= \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء مع اعادة الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{12}$

مثال (3) اذا اختيرت احدى البطاقات المرقمة وتدوير مؤشر القرص الدواركما مبين في الشكل المجاور.

ما احتمال ان يكون الناتج عدداً زوجياً واللون ازرق؟

1 2 3 4

نفرض ان $P(E_1)$ احتمال العدد الزوجي.

$$P(E_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

نفرض ان $P(E_2)$ احتمال وقوف المؤشر على اللون الازرق.

$$P(E_2) = \frac{1}{4}$$

احتمال الحوادث المستقلة $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$

بالتعويض والتبسيط $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

اذن احتمال (عدد زوجي ولون ازرق) هو $\frac{1}{8} = 12.5\%$

[6-5-2] الاحداث المترابطة Dependent Events

الاحداث المترابطة (نتيجة احدهما تؤثر في نتيجة الآخر)

اذا كان E_1 و E_2 حدثين مترابطين فان احتمال وقوعهما معاً هو حاصل ضرب احتمال الحدث الاول E_1 في ضرب (احتمال الحدث E_2 بعد حصول الحدث E_1)، اي:

$$P(E_1 \text{and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{after } E_1)$$

مثال (4) في مثال (2)، لو لم نعيد الكرة الحمراء الى الكيس. ما احتمال سحب كرة حمراء ثم كرة خضراء؟

سحب الكرة الحمراء $P(R) = \frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{العدد الكلي للكرات}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

عدم اعادة الكرة الحمراء للكيس يعني ان عدد الكرات الحمر اصبح 2 كرة، والعدد الكلي لكرات في هذه الحالة هو 11 كرة بدل 12.

سحب الكرة الخضراء $P(G \text{ after } R) = \frac{\text{عدد الكرات الخضراء}}{\text{العدد الكلي الجديد للكرات}} = \frac{4}{11}$

الحدثان مترابطان

احتمال الحوادث المترابطة $P(R \text{ and } G) = P(R) \times P(G \text{ after } R)$

بالتعويض وبالتبسيط $= \frac{1}{4} \times \frac{4}{11} = \frac{1}{11}$

اذن احتمال سحب كرة حمراء ثم خضراء دون اعادة الكرة الحمراء يساوي $\frac{1}{11}$

مثال (5) صندوق فيه 5 كرات حمر، 3 زرق، 8 صفر، سحبت كرة من الصندوق من دون اعادتها ثم سحبت ثانيةً، جد P(صفراء ثم حمراء)

افرض P(Y) سحب صفراء، $P(Y)=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

عدم اعادة الكرة الصفراء، اصبح في الصندوق 5 كرات حمراء، 3 زرقاء، 7 صفراء،اي مجموعهما 15 كرة.

سحبت كرة حمراء من الصندوق.

$$P(R \text{ after } Y)=\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$$

الحدثان مترابطان

احتمال الحوادث المترابطة

$$P(Y \text{ and } R)=P(Y)\times P(R \text{ after } Y)$$

بالتعويض و التبسيط

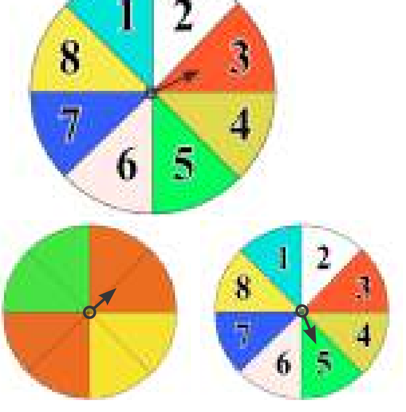
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

اذن احتمال سحب كرة صفراء ثم كرة حمراء من دون اعادة الكرة الصفراء هو $\frac{1}{6}$

الخلاصة:

1. نجد $P(E_2), P(E_1)$
2. اذا كان E_1 ، E_2 مستقلين فان: $P(E_1 \text{ and } E_2)=P(E_1)\times P(E_2)$
3. اذا E_1 ، E_2 مترابطين فان: $P(E_1 \text{ and } E_2)=P(E_1)\times P(E_2 \text{ after } E_1)$

تأكَّد من فهمِكَ



1 صندوق فيه 3 كرات حمراء، 3 كرات خضر ، ما احتمال سحب كرتين خضر من دون اعادة الكرة الاولى؟

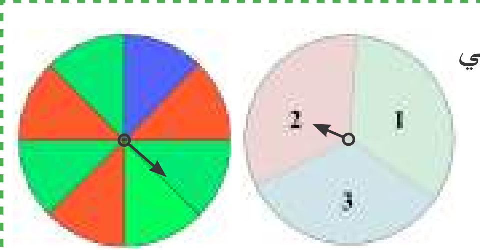
2 اطلق مؤشر في القرصين المقابلين مرة واحدة، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأحمر ومؤشر الثاني على العدد 5 ؟

3 رمي قطعتي نقود مرة واحدة، ما احتمال ظهور صورة على القطعة الاولى، وكتابة على القطعة الثانية.

تدربْ وحلّ التمريناتِ

4 صندوق فيه 5 بطاقات حمر ، 4 بطاقات سود، 6 بطاقات خضر.
سحبت بطاقة من دون اعادتها للصندوق وسحبت بطاقة ثانية، ما احتمال ان تكون البطاقة الاولى حمراء والثانية سوداء؟

5 اطلق مؤشر في القرصين المجاورين مرة واحدة، ما احتمال ان يأتي مؤشر الاول على اللون الأخضر ومؤشر الثاني على العدد 3؟



6 رمي حجري النرد مرة واحدة، ما احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على 3 على الحجر الاول، وعدد يقبل القسمة على 5 على الحجر الثاني؟

تدربْ وحلّ مسائلَ حياتيةً

7 **حلوى:** تحتوي علبة على 10 قطع حلوى بطعم الفراولة، 15 قطعة بطعم الشكولاته، 5 قطع بطعم الليمون. ما احتمال اختيار قطعتين عشوائياً الواحدة تلو الاخرى من دون ارجاع على ان تكون الاولى بطعم الشوكلاته والثانية بطعم الليمون؟

8 **كتب:** اختارت سها كتاباً من رف في غرفتها واعادته ثم اختارت كتاباً آخر، ما احتمال ان يكون اختيار الكتاب من كتب الرياضيات؟ علماً ان الرف يحتوي على 5 كتب رياضيات، 2 كتاب لغة انكليزية، 3 كتب علوم.

فَكِّرْ

9 أكتشف الخطأ: تُريد كل من جمانة واختها سالي تحديد احتمال اختيار كرة حمراء واخرى صفراء عشوائياً من كيس يحتوي 4 كرات حمراء، 5 كرات صفراء من دون ارجاع الكرة بعد السحب.

جمانة	سالي
P(حمراء وصفراء)	P(حمراء وصفراء)
P(حمراء) × P(صفراء)	P(حمراء) × P(صفراء)
$\frac{4}{9} \times \frac{5}{9}$	$\frac{4}{9} \times \frac{5}{8}$

ايهما كان حلها صحيحاً؟

10 تحدٍّ: عند رمي حجر النرد وقطعة نقود، ما احتمال ظهور رقم اكبر من 2 واصغر من 6 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود؟

مسألة مفتوحة

11 10 بطاقات بثلاثة اشكال مختلفة، اكتب مسألة تتعلق بسحب بطاقتين عشوائياً من دون ارجاعهما على ان يكون الاحتمال $\frac{1}{15}$

أُكتبْ

مثالاً على حدثين مستقلين ومثالاً آخر على حدثين مترابطين.

اختبار الفصل

Chapter Test

1 **وزع استبيان على 30 طالب من بين 100 طالب، اجب عما يأتي:**

i) حدِّد العينة والمجتمع الذي اختير منه.

ii) صف اسلوب توزيع الاستبيان.

iii) حدِّد ما اذا كانت العينة متحيزة ام لا.

2 كيف تميز بين الرسوم البيانية المضللة والرسوم البيانية غير المضللة؟

3 **جد ناتج ما يأتي:**

i) C_0^5 ii) P_0^5 iii) C_{10}^{10}

iv) P_{10}^{10} v) C_5^7 vii) P_5^7

4 بكم طريقة يمكن اختبار لجنة مكونة من 3 طلاب من بين 8 طلاب؟

5 **رمي حجر النرد 25 مرة وكانت النتائج كما موضح في الجدول الآتي:**

النتيجة	1	2	3	4	5	6
عدد المرات	2	6	3	5	2	7

i) ما نوع الاحتمال؟

ii) جد احتمال ظهور العدد 4.

6 **في تجربة رمي حجر النرد مرة واحدة، جد:**

i) نوع الاحتمال أنظري ام تجريبي.

ii) احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على 4.

7 وقف مهند في احدى تقاطعات مدينة بغداد، واحصى انواع السيارات عند التقاطع، من بين 20 سيارة شاهدها، احصى 10 سيارات صالون، 7 سيارات نقل صغيرة لنقل الركاب، 3 سيارات حمل.
قدر احتمال ان تكون السيارة التالية التي تجتاز التقاطع سيارة صالون.

تمرينات الفصول

الاختيار من متعدد Multiple choice

الفصل الأول

العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

Relations and Inequalities in Real Numbers

الفصل الثاني

المقادير الجبرية

Algebraic Expressions

الفصل الثالث

المعادلات

Equations



الهندسة الاحداثية

Coordinate Geometry

الفصل الخامس

الهندسة والقياس

Geometric and Measurement



الاحصاء والاحتمالات

Statistics and Probabilities

Multiple Choice الاختيارُ من متعدد

الدرس [1-1] ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية

Ordering Operations in Real Numbers

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

بسّط الجمل العددية التالية باستعمال ترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

1. $(\sqrt{2}+\sqrt{7})(\sqrt{2}+\sqrt{7}) = \ldots$ a) $2+9\sqrt{7}$ b) $2+9\sqrt{2}$ c) $9+2\sqrt{14}$ d) $2+9\sqrt{14}$

2. $\dfrac{6\sqrt{50}}{3\sqrt[3]{-8}} \div \dfrac{2\sqrt{14}}{\sqrt{7}} = \ldots$ a) $\dfrac{-5}{2}$ b) $\dfrac{-2}{2}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\dfrac{-\sqrt{2}}{5}$

3. $(-27)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{6}\sqrt{2}-\frac{1}{4}\sqrt{32}\right) = \ldots$ a) $\dfrac{-5}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{5}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$ d) $\dfrac{-\sqrt{2}}{5}$

بسّط الجملة العددية التالية باستعمال تنسيب المقام وترتيب العمليات في الأعداد الحقيقية:

4. $\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})} = \ldots$ a) $5+6\sqrt{2}$ b) $5-6\sqrt{2}$ c) $2\sqrt{6}-5$ d) $2\sqrt{6}+5$

استعمل ترتيب العمليات واكتب الناتج مقرباً إلى مرتبتين عشريتين مستعملاً الحاسبة:

5. $\left(\frac{1}{3}\right)^{2} - 3^{-2} - (5)^{\frac{3}{2}} \approx \ldots$ a) -18.11 b) 18.11 c) 11.18 d) -11.18

ا

الدرس [1-2] التطبيقات

Mappings

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 إذا كانت $f: Z \longrightarrow R$ إذ $f(x) = 3x - 2$. فإن العدد 10 هو صورة للعدد:

a) 5 b) 4 c) 3 d) 2

2 ليكن $f{:}A \longrightarrow B$ إذ $A = \{2 , 3 , 4 , 5\}$ ، $B = \{4 , 6 , 8\}$. وإن $f = \{(2 , 4), (3 , 6), (4 , 8), (5 , 8)\}$
فإن f يمثل تطبيقاً شاملاً لأن:

a) المدى ≠ المجال المقابل
b) f تطبيق غير متباين
c) المدى هو مجموعة A
d) المدى = المجال المقابل

3 إذا كانت $f: Z \longrightarrow Z$ إذ $f(x) = 2x - 3$ و $g{:}Z \longrightarrow Z$ إذ $g(x) = x + 1$. فإن التطبيق $(gof)(x)$ هو:

a) $2x - 2$ b) $2x - 4$ c) $2x + 2$ d) $2x + 4$

4 ليكن $f{:}\{2 , 3 , 5\} \longrightarrow N$ إذ $f(x) = 3x - 1$ وإن $g{:}N \longrightarrow N$ إذ $g(x) = x + 1$ فإن مدى gof هو المجموعة:

a) $\{5 , 8 , 14\}$
b) $\{5 , 6 , 9\}$
c) $\{6 , 12 , 15\}$
d) $\{6 , 9 , 15\}$

5 إذا كان التطبيق $f: Q \longrightarrow Q$ إذ $f(x) = 4x + 1$ والتطبيق $g: Q \longrightarrow Q$ إذ $g(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$.
جد قيمة x إذا كانت $(fog)(x) = 45$. فإن قيمة x هي:

a) ± 5 b) ± 6 c) ± 7 d) ± 8

الدرس [3-1] المتتابعات

The Sequences

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الآتية:

1 $\{5n - 2\} = \ldots$

a) {2, 6, 12, 16, 20} b) {3, 8, 13, 18, 23}
c) {4, 8, 12, 18, 22} d) {5, 10, 16, 20, 24}

2 $\{\frac{n}{2} + 1\} = \ldots\ldots$

a) $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$ b) $\{\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}\}$
c) $\{\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}\}$ d) $\{2, \frac{5}{2}, 3\ \frac{7}{2}, 4\}$

اكتب الحدود الخمسة الأولى لكل متتابعة من المتتابعات الحسابية الآتية:

3 متتابعة حسابية الحد الثاني فيها 3 وأساسها 3 .

a){0,3,6,9,12} b){2,5,8, 11,14} c){3,6,9, 12,15} d){1,4,7,10,13}

4 جد الحد التاسع والحد الخامس عشر للمتتابعة الحسابية التي حدها الثاني 2 وأساسها 2 .

a) $u_9 = 12$, $u_{15} = 20$ b) $u_9 = 14$, $u_{15} = 24$ c) $u_9 = 16$, $u_{15} = 28$ d) $u_9 = 18$, $u_{15} = 32$

5 جد الحدود بين u_2 و u_6 لمتتابعة حسابية حدها الثاني $\frac{9}{5}$ وأساسها 2 .

a) $\{\frac{9}{2}, \frac{19}{2}, \frac{29}{2}\}$ b) $\{\frac{19}{2}, \frac{29}{2}, \frac{39}{2}\}$ c) $\{\frac{9}{5}, \frac{19}{5}, \frac{29}{5}\}$ d) $\{\frac{19}{5}, \frac{29}{5}, \frac{39}{5}\}$

الدرس [4-1] المتباينات المركبة

Compound Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المتباينات المركبة التي تتضمن (و) جبرياً:

1. $-10 < x$ و $x \leq -2$
   a) $\{x: -10 \leq x\} \cap \{x: x \leq -2\}$
   b) $\{x: -10 < x\} \cap \{x: x \leq -2\}$
   c) $\{x: -10 \leq x\} \cup \{x: x \leq -2\}$
   d) $\{x: -10 < x\} \cup \{x: x \leq -2\}$

2. $16 < 3z + 9$ و $3z + 9 < 30$
   a) $\{z: \frac{3}{7} \leq z < 7\}$
   b) $\{z: \frac{7}{3} < z \leq 7\}$
   c) $\{z: \frac{3}{7} < z < 7\}$
   d) $\{z: \frac{7}{3} < z < 7\}$

حل المتباينة المركبة التي تتضمن (أو) جبرياً:

3. $\frac{y+5}{3} < \frac{1}{3}$ أو $\frac{y+5}{3} > \frac{7}{3}$
   a) $\{y: y < 4\} \cap \{y: y > 2\}$
   b) $\{y: y > -4\} \cup \{y: y < 2\}$
   c) $\{y: y < -4\} \cap \{y: y > -2\}$
   d) $\{y: y < -4\} \cup \{y: y > 2\}$

اكتب المتباينة المركبة التي تبيّن مدى طول الضلع الثالث في المثلث إذا كان طولا الضلعين الآخرين للمثلث معلومين:

4. 8cm , 2cm
   a) $6 \leq x < 10$
   b) $6 \leq x \leq 10$
   c) $6 < x < 10$
   d) $6 < x \leq 10$

اكتب المتباينة التي مجموعة الحل لها على مستقيم الأعداد هي:

5. -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7
   a) $y \leq -3$ أو $y > 5$
   b) $y \leq -3$ أو $y \geq 5$
   c) $y < -4$ أو $y \geq 5$
   d) $y < -3$ أو $y > 5$

الدرس [5-1] متباينات القيمة المطلقة

Absolute Value Inequalities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل متباينات القيمة المطلقة الآتية:

1 $|y - 8| < 13$ a) $5 < y < -21$ b) $-5 \leq y \leq 21$ c) $-5 < y < 21$ d) $-5 < y \leq 21$

2 $|3x| - 7 < 1$ a) $-\frac{8}{3} \leq x < \frac{8}{3}$ b) $-\frac{8}{3} < x \leq \frac{8}{3}$ c) $-\frac{8}{3} \leq x \leq \frac{8}{3}$ d) $-\frac{8}{3} < x < \frac{8}{3}$

3 $|6 - 3y| \geq 9$ a) $y \leq 1$ أو $y \geq -5$ b) $y < -1$ أو $y > 5$

c) $y > -1$ أو $y < 5$ d) $y \leq -1$ أو $y \geq 5$

4 $|\frac{7 - 2y}{3}| \geq 3$ a) $y \leq -1$ أو $y \geq 8$ b) $y < -1$ أو $y \geq 8$

c) $y < -1$ أو $y > 8$ d) $y < -1$ أو $y > 8$

الدرس [2-1] ضرب المقادير الجبرية

Multiplying Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد ناتج ضرب مقدار جبري في مقدار جبري آخر:

1. $(x + 5)^2$ a) $x^2 - 10x + 25$ b) $x^2 + 10x + 25$ c) $x^2 + 5x + 25$ d) $x^2 - 5x + 25$

2. $(z - \sqrt{7})^2$ a) $z^2 - 7z + 49$ b) $z^2 + 7y + 49$ c) $z^2 - \sqrt{7}\,z + 7$ d) $z^2 - 2\sqrt{7}\,z + 7$

3. $(x + 8)(x - 8)$ a) $x^2 - 64$ b) $x^2 + 64$ c) $x^2 + 16$ d) $x^2 - 16$

4. $(y + \sqrt{6})(y - \sqrt{6})$ a) $y^2 - \sqrt{12}$ b) $y^2 - 6$ c) $y^2 + \sqrt{12}$ d) $y^2 + 6$

5. $(y - 2)(y^2 + 2y + 4)$ a) $y^3 + 8$ b) $y^3 - 8$ c) $y^3 - 4$ d) $y^3 - 16$

6. $(y + \frac{1}{5})^3$ a) $y^3 - \frac{3}{3}y^2 + \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$ b) $y^3 + \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$
c) $y^3 + \frac{3}{5}y^2 + \frac{3}{25}y + \frac{1}{125}$ d) $y^3 - \frac{3}{5}y^2 - \frac{3}{25}y - \frac{1}{125}$

الدرس [2-2] تحليل المقدار الجبري بالعامل المشترك الأكبر

Factoring the Algerbraic Expression by using Greater Common Factor

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل مقدار باستعمال العامل المشترك الأكبر (GCF):

1 $6y^2(3y - 4) + 36y$

a) $6y(3y^2 + 4y + 6)$ b) $6y(3y^2 + 4y - 6)$

c) $6y(3y^2 - 4y - 6)$ d) $6y(3y^2 - 4y + 6)$

حلل كل مقدار باستعمال ثنائية الحد كعامل مشترك أكبر:

2 $\frac{1}{4}(x + 9) - \frac{1}{2}x^2(x + 9)$

a) $(x + 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$ b) $(x - 9)(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x^2)$

c) $(x + 9)(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^2)$ d) $(x + 9)(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}x^2)$

3 $\sqrt{2}\,v(x - 1) - \sqrt{3}\,t(x - 1)$

a) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$ b) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v - \sqrt{3}\,t)$

c) $(x - 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$ d) $(x + 1)(\sqrt{2}\,v + \sqrt{3}\,t)$

حلل كل مقدار باستعمال خاصية التجميع وتحقق من صحة الحل:

4 $3y^3 - 9y^2 + 5y - 15$

a) $(y + 3)(3y^2 + 5)$ b) $(y + 3)(3y^2 - 5)$

c) $(y - 3)(3y^2 + 5)$ d) $(y - 3)(3y^2 - 5)$

حلل المقدار باستعمال خاصية التجميع مع المعكوس:

5 $20y^3 - 4y^2 + 3 - 15y$

a) $(5y + 1)(4y^2 - 3)$ b) $(5y - 1)(4y^2 + 3)$

c) $(5y - 1)(4y^2 - 3)$ d) $(5y + 1)(4y^2 + 3)$

الدرس [2-3] تحليل المقدار الجبري بالمتطابقات

Factoring the Algerbraic Expression by using Special Identities

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار جبري من المقادير الجبرية الآتية:

1. $12y^3z - 3yz^3$
   a) $3y(2y - z)(y + 2z)$ b) $3z(2y - z)(2y + z)$
   c) $3yz(2y - z)(2y + z)$ d) $3yz(y - 2z)(y + 2z)$

2. $\frac{1}{6}x^3 - x\frac{1}{24}$
   a) $\frac{x}{6}(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{2})$ b) $\frac{x}{6}(x + \frac{1}{4})(x - \frac{1}{4})$
   c) $\frac{x}{3}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2})(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$ d) $\frac{x}{6}(\frac{1}{4}x + \frac{1}{4})(\frac{1}{4}x - \frac{1}{4})$

3. $4x^2 + 24x + 36$
   a) $(x + 6)^2$ b) $(x - 6)^2$ c) $4(x - 3)^2$ d) $4(x + 3)^2$

حدد أي من المقادير الجبرية التالية يمثل مربعاً كاملاً:

4. $64 - 48y + 9y^2$
   a) $2(4)(3y) \neq -48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن   b) $2(8)(4y) = 48y$ مربع كامل لأن
   c) $-2(8)(3y) = -48y$ مربع كامل لأن   d) $-4(4)(3y) \neq 48y$ ليس مربعاً كاملاً لأن

اكتب الحد المفقود في المقدار الجبري $ax^2 + bx + c$ ليصبح مربعاً كاملاً:

5. $z^2 + ... + 49$
   a) $14z$ b) $-10z$ c) $7z$ d) $-7z$

6. $36 - 24x + ...$
   a) $2x^2$ b) $-2x^2$ c) $4x^2$ d) $-4x^2$

الدرس [2-4] تحليل المقدار الجبري من ثلاثة حدود بالتجربة

Factoring the Algebraic Expression of three terms by Probe and Error (Experiment)

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1. $x^2 + 7x + 12$
   a) $(x - 3)(x + 4)$ b) $(x + 3)(x + 4)$
   c) $(x - 1)(x + 7)$ d) $(x - 3)(x - 4)$

2. $x^2 - 5x - 36$
   a) $(x - 6)(x + 6)$ b) $(x + 12)(x - 3)$
   c) $(x - 9)(x + 4)$ d) $(x + 9)(x - 4)$

3. $y^2 + 4y - 21$
   a) $(y - 7)(y + 3)$ b) $(y + 7)(y - 3)$
   c) $(y – 7)(y - 3)$ d) $(y + 7)(y + 3)$

ضع الإشارات بين الحدود في الأقواس ليكون تحليل المقدار الجبري صحيحاً:

4. $4y^2 -2y -12 = (2y…3)(2y…4)$
   a) $(2y - 3)(2y + 4)$ b) $(2y + 3)(2y + 4)$
   c) $(2y - 3)(2y - 4)$ d) $(2y + 3)(2y - 4)$

5. $48 - 30z + 3z^2 = (6…3z)(8… z)$
   a) $(6 - 3z)(8 - z)$ b) $(6 + 3z)(8 + z)$
   a) $(6 - 3z)(8 + z)$ b) $(6 + 3z)(8 - z)$

الدرس [2-5] تحليل المقدار الجبري مجموع مكعبين أو فرق بين مكعبين

Factoring the Algebraic Expressions sum of two cubes ordifference between two cubes

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حلل كل مقدار من المقادير الجبرية التالية إلى أبسط صورة:

1. $8 + x^3$

   a) $(2 - x)(4 + 2x + x^2)$ b) $(2 + x)(4 - 2x + x^2)$

   c) $(2 - x)(4 - 2x + x^2)$ d) $(2 + x)(4 + 2x + x^2)$

2. $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{64}$

   a) $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$ b) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

   c) $(\frac{1}{z} - \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$ d) $(\frac{1}{z} + \frac{1}{4})(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{16})$

3. $\frac{27}{125} + \frac{8}{x^3}$

   a) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} + \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$ b) $(\frac{3}{5} - \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$

   c) $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} + \frac{4}{x^2})$ d) $(\frac{3}{5} + \frac{2}{x})(\frac{9}{25} - \frac{6}{5x} - \frac{4}{x^2})$

4. $9 - \frac{1}{3} z^3$

   a) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z - z^2)$ b) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 + 3z + z^2)$

   c) $\frac{1}{3}(3 + z)(9 + 3z + z^2)$ d) $\frac{1}{3}(3 - z)(9 - 3z + z^2)$

5. $0.008x^3 -1$

   a) $(0.02x -1)(0.04x^2 + 0.002x + 1)$ b) $(0.02x - 1)(0.04x^2 + 0.02x + 1)$

   c) $(0.2x + 1)(0.4x^2 - 0.2x + 1)$ d) $(0.2x - 1)(0.04x^2 + 0.2x + 1)$

الدرس [2-6] تبسيط المقادير الجبرية النسبية

Simplifying Rational Algebraic Expressions

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

1. $\frac{x+3}{4x} \times \frac{4x-12}{x^2-9}$ a) $\frac{3}{x}$ b) $\frac{x}{4}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{x}$

2. $\frac{z^2-2z-15}{9+3z} \times \frac{5}{z^2-25}$ a) $\frac{5}{z+5}$ b) $\frac{3}{5(z+5)}$ c) $\frac{5}{3(z+5)}$ d) $\frac{3}{z+5}$

3. $\frac{1-z^3}{1+z+z^2} \div \frac{(1-z)^2}{1-z^2}$ a) $1-z$ b) $1+z$ c) $1+z+z^2$ dc) $1-z+z^2$

اكتب كل مقدار من المقادير التالية بأبسط صورة:

4. $\frac{2y^2+1}{y^3-1} - \frac{y}{y^2+y+1}$ a) $\frac{y}{y+1}$ b) $\frac{1}{y+1}$ c) $\frac{1}{y-1}$ d) $\frac{y}{y-1}$

5. $\frac{3y+1}{y+4} - \frac{y-4}{3y-1} - \frac{10+8y^2}{3y^2+11y-4}$ a) $\frac{5}{(y+4)(3y-1)}$ b) $\frac{3}{(y+4)(3y-1)}$ c) $\frac{-3}{(y+4)(3y-1)}$ d) $\frac{-5}{(y+4)(3y-1)}$

الدرس [3-1] حل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين
Solving the system of two Linear Equations with two variables

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة حل للنظام بيانياً:

1. $\left.\begin{array}{l} y = 4x - 6 \\ y = x \end{array}\right\}$ a) {(-2 , -2)} b) {(-2 , 2)} c) {(2 , -2)} d) {(2 , 2)}

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال التعويض لكل مما يأتي:

2. $\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 26 \\ 5x - 2y = 0 \end{array}\right\}$ a) {(2 , 5)} b) {(-2 , -5)} c) {(2 , -5)} d) {(-2 , 5)}

3. $\left.\begin{array}{l} \frac{3x}{4} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{y}{2} - \frac{x}{4} = 2 \end{array}\right\}$ a) {(12 , -10)} b) {(-12, -10)} c) {(12 , 10)} d) {(-12 , 10)}

جد مجموعة الحل للنظام باستعمال الحذف لكل مما يأتي:

4. $\left.\begin{array}{l} 7x - 4y = 12 \\ 3x - y = 5 \end{array}\right\}$ a) $\{(-\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ b) $\{(-\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$ c) $\{(\frac{8}{5}, \frac{1}{5})\}$ d) $\{(\frac{8}{5}, -\frac{1}{5})\}$

5. $\left.\begin{array}{l} 6y - 2x - 8 = 0 \\ y + x - 12 = 0 \end{array}\right\}$ a) {(8 , -4)} b) {(8, 4)} c) {(-8 , 4)} d) {(-8 ,-4)}



الدرس [2-3] حل المعادلات التربيعية بمتغير واحد

Solving Quadratic Equations with one variable

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية باستعمال العامل المشترك الأكبر والفرق بين مربعين:

1. $7z^2 - 21 = 0$ a) $s = \{7 , -7\}$ b) $s = \{3 , -3\}$ c) $s = \{\frac{1}{3} , -\frac{1}{3}\}$ d) $s = \{\sqrt{3} , -\sqrt{3}\}$

2. $4(x^2 - 1) - 5 = 0$ a) $s = \{\frac{3}{2} , -\frac{3}{2}\}$ b) $s = \{\frac{1}{2} , -\frac{1}{2}\}$ c) $s = \{\frac{3}{2} , \frac{3}{2}\}$ d) $s = \{\frac{1}{2} , \frac{1}{2}\}$

3. $(y + 7)^2 - 81 = 0$ a) $s = \{2 , -2\}$ b) $s = \{16 , -16\}$ c) $s = \{2 , -16\}$ d) $s = \{-2 , 16\}$

حل المعادلات التالية باستعمال قاعدة الجذر التربيعي:

4. $4(y^2 - 1) = 45$ a) $s = \{\frac{7}{2} , -\frac{7}{2}\}$ b) $s = \{\frac{7}{2} , \frac{7}{2}\}$ c) $s = \{\frac{2}{7} , -\frac{2}{7}\}$ d) $s = \{\frac{7}{4} , -\frac{7}{4}\}$

5. $x^2 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$ a) $s = \{\frac{3}{4} , -\frac{3}{4}\}$ b) $s = \{\frac{\sqrt{3}}{4} , -\frac{\sqrt{3}}{4}\}$ c) $s = \{2 , -2\}$ d) $s = \{1 , -1\}$

الدرس [3-3] حل المعادلات التربيعية بطريقة التجربة

Solving the quadratic equations by the experiment

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالتحليل بالتجربة:

1 $y^2 + 10y + 21 = 0$ a) s ={3,-7} b) s ={-3,7} c) s ={-3,-7} d) s ={3,7}

2 $x^2 - 5x - 36 = 0$ a) s ={7, -8} b) s ={-4,9} c) s ={4,-9} d) s ={-4,-9}

3 $32 + 12x - 9x^2 = 0$ a) $s = \{\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\}$ b) $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{-8}{4}\}$ c) $s = \{\frac{4}{3}, \frac{-8}{3}\}$ d) $s = \{\frac{-4}{3}, \frac{8}{3}\}$

4 ما العدد الذي مربعه يزيد عليه بمقدار 42 ؟

a) s ={7, 6} b) s ={7, - 6} c) s ={-7, 6} d) s ={-7, - 6}

5 عددان حاصل ضربهما 54 ، أحدهما يزيد عن الآخر بمقدار 3 . فما العددان؟

a) s ={6 , 9} b) s ={6 , -9} c) s ={-6 , 9} d) s ={-6 , - 9}

الدرس [3-4] حل المعادلات التربيعية بإكمال المربع

Solving the Quadratic Equations by perfect square

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

حل المعادلات التالية بالمربع الكامل:

1. $x^2 + 6x + 9 = 0$ a) $x = 6$ b) $x = -3$ c) $x = 4$ d) $x = 3$

2. $4z^2 - 20z + 25 = 0$ a) $z = \frac{-5}{2}$ b) $z = \frac{-2}{5}$ c) $z = \frac{5}{2}$ d) $z = \frac{2}{5}$

3. $\frac{1}{16} - \frac{1}{2}x + x^2 = 0$ a) $y = \frac{1}{4}$ b) $y = \frac{-1}{4}$ c) $y = \frac{1}{2}$ d) $y = \frac{-1}{2}$

حل المعادلات التالية بإكمال المربع:

4. $x^2 - 12x = 13$ a) $s = \{13, 1\}$ b) $s = \{13, -1\}$ c) $s = \{-13, 1\}$ d) $s = \{-13, -1\}$

5. $y^2 - \frac{1}{3}y = \frac{2}{9}$ a) $\{\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\}$, b) $\{\frac{-3}{2}, \frac{1}{3}\}$
c) $\{\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\}$, d) $\{\frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\}$

6. $z^2 + 2\sqrt{5}\,z = 4$ a) $s = \{3 + \sqrt{5}, 3 - \sqrt{5}\}$ b) $s = \{\sqrt{5} - 3, 3 - \sqrt{5}\}$
c) $s = \{3 - \sqrt{5}, -3 - \sqrt{5}\}$ d) $s = \{\sqrt{5} + 3, \sqrt{5} - 3\}$

الدرس [3-5] حل المعادلات بالقانون العام

Using General Law to solve the equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

مجموعة الحل للمعادلات التالية باستعمال القانون العام:

1 $y^2 - 5y - 5 = 0$

a) $s = \{\frac{3+5\sqrt{5}}{2}, \frac{3-5\sqrt{5}}{2}\}$ b) $s = \{\frac{5+3\sqrt{5}}{4}, \frac{3-5\sqrt{5}}{4}\}$

c) $s = \{\frac{5+3\sqrt{5}}{2}, \frac{5-3\sqrt{5}}{2}\}$ d) $s = \{\frac{5+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-3\sqrt{3}}{2}\}$

2 $2x^2 - 8x = -3$

a) $s = \{\frac{4+\sqrt{10}}{2}, \frac{4-\sqrt{10}}{2}\}$ b) $s = \{\frac{2+\sqrt{10}}{2}, \frac{4+\sqrt{10}}{2}\}$

c) $s = \{\frac{4+\sqrt{5}}{4}, \frac{4-\sqrt{5}}{4}\}$ d) $s = \{\frac{2+\sqrt{5}}{2}, \frac{2-\sqrt{5}}{2}\}$

3 $3x^2 - 6(2x+1) = 0$

a) $s = \{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$ b) $s = \{2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\}$

c) $s = \{2+\sqrt{6}, 2-\sqrt{6}\}$ d) $s = \{6+\sqrt{6}, 6-\sqrt{6}\}$

حدِّد جذر المعادلة باستعمال المميز:

4 $x^2 - 6x - 7 = 0$

a) جذران حقيقيان نسبيان b) جذران حقيقيان غير نسبيين

c) جذران حقيقيان متساويان $(\frac{-b}{2a})$ d) جذران غير حقيقيين (مجموعة الحل في $R = \varnothing$)

5 ما قيمة الثابت k التي تجعل جذري المعادلة $y^2 - (k + 10)y + 16 = 0$ متساويين؟

a) $k = 2, -18$ b) $k = -2, -18$ c) $k = 6, 18$ d) $k = -6, -18$

الدرس [3-6] حل المعادلات الكسرية

Solving the Fractional Equations

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

1 $\frac{2}{12x^2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4x}$ a) $s=\{2, \frac{1}{2}\}$ b) $s=\{-2, \frac{1}{2}\}$ c) $s=\{2, \frac{-1}{2}\}$ d) $s=\{-2, \frac{-1}{2}\}$

2 $\frac{8x}{5} = \frac{5}{8x}$ a) $s=\{\frac{5}{8}, \frac{-8}{5}\}$ b) $s=\{\frac{5}{8}, \frac{8}{5}\}$ c) $s=\{\frac{5}{8}, \frac{-5}{8}\}$ d) $s=\{\frac{8}{5}, \frac{-8}{5}\}$

3 $\frac{16x - 64}{x^2} = 1$ a) $x = -8$ b) $x = 8$ c) $x = -6$ d) $x = 6$

جد مجموعة الحل لكل معادلة من المعادلات الآتية:

4 $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-1} = 1$ a) $s=\{2+\sqrt{7}, 2-\sqrt{7}\}$ b) $s=\{1+\sqrt{3}, 1-\sqrt{3}\}$ c) $s=\{1+\sqrt{7}, 1-\sqrt{7}\}$ d) $s=\{2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}\}$

5 $\frac{3y}{y-4} + \frac{y}{y-2} = \frac{5y^2 - 4y + 8}{y^2 - 6y + 8}$ a) $s=\{4,-2\}$ b) $s=\{-4,-2\}$ c) $s=\{-4,2\}$ d) $s=\{4,2\}$

الدرس [1-4] التمثيل البياني للمعادلات في المستوي الاحداثي

Graphical Representation of the Equation in the Coordinate Plane

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المستقيم الذي معادلته $y = \frac{3}{2}$.

a) يقطع المحورين b) يوازي محور الصادات c) يوازي محور السينات d) لايقطع اي من المحورين

2 أي المعادلات التالية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانياً جانباً ؟

a) $y = -3x^2$ b) $y = 2x^2 + 4$
c) $y = x^2 - 4$ d) $y = 3x^2 - 4$

3 أي المعادلات التالية تعبر عن المعادلة المتمثلة بيانياً جانباً ؟

a) $y = 3x + 4$ b) $y = 4x + 3$
c) $y = -3 + 4$ d) $y = 3x - 4$

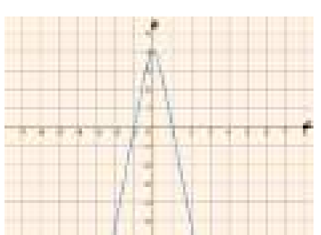
4 أي المعادلات التالية تعبر عن معادلة خطية ؟

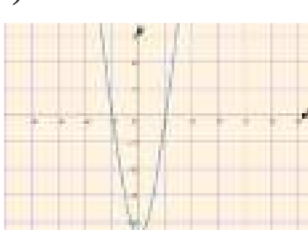
a) $y = x^2 + 1$ b) $y^2 = x + 1$ c) $y^2 = x^2 + 1$ d) $y = x + 1$

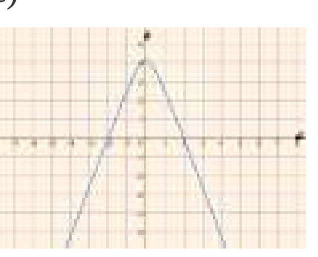


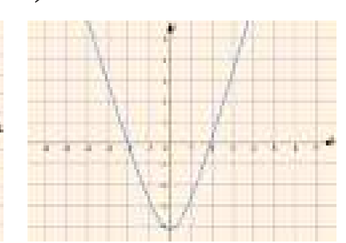
5 أي التمثيلات البيانية تعبر عن المعادلة: $y = -x^2 + 4$ ؟



a) 

b) 

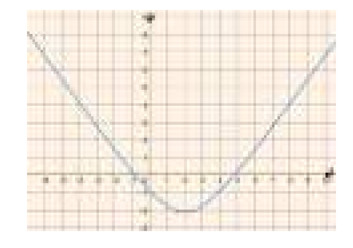
c) 

d) 

6 لتمثيل المعادلة غير الخطية نحتاج الى :

a) نقطة واحدة على الاقل b) نقطتان على الاكثر c) نقطتان فقط d) ثلاث نقاط على الاقل

7 ما احداثيا رأس المنحني الممثل جانباً ؟



a) (2,-1) b) (1,2) c) (2,-2) d) (0,2)

الدرس [2-4] ميل المستقيم

Slop of the Line

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أي ميل يعبر عن ميل المستقيم المار بالنقطتين: $(-1,3), (5,-2)$

a) $\frac{5}{6}$ b) $-\frac{6}{5}$ c) $\frac{-5}{6}$ d) $\frac{6}{5}$

2 المستقيم الموازي لمحور الصادات يكون ميله:

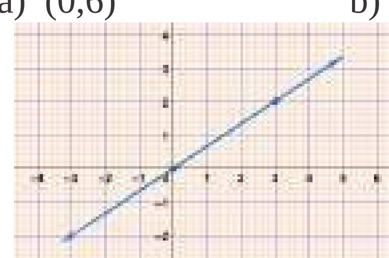
a) صفراً b) غير معرف c) سالب d) موجب

3 المقطع الصادي للمستقيم الذي معادلته $3x-5y=15$ هو:

a) -5 b) 3 c) 5 d) -3

4 نقطة تقاطع المستقيم الذي معادلته $x+y=6$ مع محور السينات هي:

a) (0,6) b) (-6,0) c) (6,0) d) (0,0)



5 اي المستقيمات التالية تعبر عن المستقيم الممثل جانباً؟

a) $2x-3y=0$ b) $3y+2x=0$ c) $3y-2x=0$ d) $2x+3y=0$

6 المستقيم الموازي لمحور السينات يكون ميله:

a) صفراً b) غير معرف c) سالب d) موجب

7 ما ميل المستقيم $3x-2y=-6$ ؟

a) $-\frac{3}{2}$ b) $-\frac{2}{3}$ c) 3 d) $\frac{3}{2}$

8 ميل المستقيم المار بالنقطتين $(8,-3), (5,-3)$ ؟

a) موجب b) سالب c) صفر d) غير معرف

الدرس [4-3] معادلة المستقيم

The Equation of the Line

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-2,-3),(-1,-7)$ هي:

a) $y-4x=-11$ b) $y-4x=11$ c) $4y+x=-11$ d) $y+4x=-11$

2 المستقيم الذي معادلته $y+x=0$ ، ميله واحدى نقاطه هما:

a) $m=-1, (4,4)$ b) $m=1, (4,4)$ c) $m=-1, (4,-4)$ d) $m=1, (-4,-4)$

3 استعمل معادلة المستقيم $y=mx+k$ وجد قيمة k, m للمستقيم $7y-3x=21$:

a) $m=\frac{3}{7}, k=-3$ b) $m=\frac{7}{3}, k=3$ c) $m=\frac{3}{7}, k=-3$ d) $m=\frac{3}{7}, k=3$

4 اي النقط التالية تقع على المستقيم الذي معادلته: $y+4x=0$

a) $(1,4)$ b) $(4,-1)$ c) $(4,1)$ d) $(1,-4)$

5 معادلة المستقيم الذي ميله (-1) ومقطعه الصادي يساوي (-2) هو:

a) $y+x-2=0$ b) $y+x+2=0$ c) $y+x-2=0$ d) $y-x-2=0$

6 ما هي على صورة الميل ـ التقاطع معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-1,-2),(1,6)$

a) $y=-3x+6$ b) $y=4x-2$ c) $y=4x+2$ d) $y=2x+4$

7 ثمن وجبة طعام في احد المطاعم 25 الف دينار، مضافاً اليها 3 الاف دينار لكل نوع اضافي من المقبلات، اي المعادلات تمثل ثمن وجبة طعام مع (x) من المقبلات؟

a) $y=25x+3$ b) $y=25x-3$ c) $y=3x+25$ d) $y=3x-25$

الدرس [4-4] المستقيمات المتوازية والمتعامدة
Parallel and Perpendicular Lines

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المستقيم المار بالنقطتين $(1,9),(7,1)$ يوازي المستقيم الذي ميله:

a) $\frac{-3}{4}$ b) $\frac{-4}{3}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{4}{3}$

2 اذا كان m_1, m_2 يمثلان ميلي مستقيمين متعامدين فأن:

a) $m1 + m2 = -1$ b) $\frac{m_1}{m_2} = -1$ c) $m_1 \times m_2 = -1$ d) $m_1 - m_2 = -1$

3 قيمة a التي تجعل ميل المستقيم المار بالنقطتين $(-1,4),(a,-1)$ تساوي $\frac{-5}{3}$ هي:

a) 4 b) -2 c) -4 d) 2

4 معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0,3)$ والعمودي على المستقيم الذي ميله $\frac{4}{3}$ هي:

a) $3y + 4x = 12$ b) $3y + 4x = -12$ c) $4y - 3x = 12$ d) $4y + 3x = 12$

5 اذا كان $m_1 = m_2$ يمثلان ميلي المستقيمين L_1, L_2 فأن:

a) $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$ b) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ c) $\overleftrightarrow{L_2}, \overleftrightarrow{L_1}$ متقاطعان d) ليس بينهما اي علاقة

6 اي المستقيمات الآتية توازي المستقيم الذي معادلته $6y-5x = 30$

a) $6y + 5x = 30$ b) $5y - 6x = 30$ c) $6y - 5x = 25$ d) $6y + 5x = 25$

7 اي المستقيمات الآتية عمودية على المستقيم الذي معادلته $3y+2x = 6$

a) $3y + 2x = -6$ b) $3y - 2x = -6$ c) $2y + 3x = 6$ d) $2y - 3x = 6$

الدرس [4-5] المسافة بين نقطتين

Distance between two Points

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 المسافة بين نقطتين: $(0,3),(2,-5)$ تساوي:

a) $-2\sqrt{17}$ b) $\sqrt{10}$ c) $17\sqrt{2}$ d) $2\sqrt{17}$

2 نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(3,-1),(7,-3)$:

a) $(5,2)$ b) $(-2,5)$ c) $(5,-2)$ d) $(-5,-2)$

3 اذا كانت نقطة منتصف قطعة مستقيم $\overline{AB}$ هي $(2,1)$ حيث $A(a,b),B(3,2)$ فأن قيمة b,a هي:

a) $a=1, b=1$ b) $a=1, b=-1$ c) $a=-1, b=0$ d) $a=1, b=0$

4 قانون المسافة بين النقطتين $(x_2,y_2),(x_1,y_1)$ هو:

a) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$ b) $\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$

c) $\sqrt{(x_2+x_1)^2+(y_2+y_1)^2}$ d) $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

5 قانون نقطة منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين $(x_2,y_2),(x_1,x_2)$ هو:

a) $(\frac{x_2-x_1}{2},\frac{y_2-y_1}{2})$ b) $(\frac{x_1+x_2}{3},\frac{y_1+y_2}{3})$

c) $(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$ d) $(\frac{y_1+y_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2})$

6 النقطة $(2,-2)$ هي منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين:

a) $(-8,-1),(4,-3)$ b) $(8,1),(1,-3)$

c) $(8,1),(4,-3)$ d) $(8,-1),(-4,-3)$

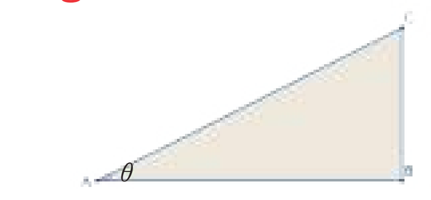
7 باستعمال قانون المسافة: المثلث الذي رؤوسه $A(3,-1),B(-3,3),C(-3,-1)$:

a) متساوي الساقين b) متساوي الاضلاع

c) مختلف الاضلاع حاد الزوايا d) مختلف الاضلاع قائم الزاوية

الدرس [4-6] النسب المثلثية

Trigonometric ratios



اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 من الشكل المجاور النسبة المثلثية $\sin\theta$ تكتب:

a) $\frac{AB}{AC}$ b) $\frac{BC}{AB}$ c) $\frac{BC}{AC}$ d) $\frac{AB}{AC}$

2 ABC مثلث قائم الزاوية في B، اذا كانت $\cos A = \frac{3}{5}$ فأن tanC يساوي:

a) $\frac{4}{5}$ b) $\frac{5}{4}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{3}{4}$

3 اذا كانت $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ فأن قيمة الزاوية θ يساوي:

a) 45° b) 60° c) 90° d) 30°

4 القيمة العددية للمقدار: $\sin 30^\circ \cos 30^\circ$ تساوي:

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

5 مقلوب النسبة $\cos\theta$ هي:

a) $\sin\theta$ b) $\sec\theta$ c) $\csc\theta$ d) $\cot\theta$

6 القيمة العددية للمقدار $(\sec 60^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2$ تساوي:

a) -1 b) 0 c) 2 d) 1

7 ABC مثلث قائم الزاوية في B كما في الشكل المجاور:

القيمة العددية للمقدار $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2$ يساوي:

a) -1 b) 0 c) 2 d) 1

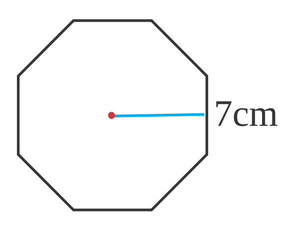
8 اذا كانت $\csc\theta = 2$ فأن قيمة الزاوية θ هي:

a) 45° b) 60° c) 90° d) 30°

الدرس [5-1] المضلعات والمجسمات (الهرم والمخروط)

Polygons and Polyhedrons (Pyramid and Cone)

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:



1 محيط الثماني المنتظم المجاور؟

a) 45.5 cm b) 48 cm c) 38.3 cm d) 56 cm

2 محيط مربع مساحته $225m^2$ هو:

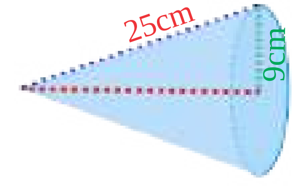
a) 25m b) 20 m c) 15 m d) 60 m

3 محيط خماسي منتظم طول عامده 3m ونصف قطر دائرته 5m هو:

a) 16.2 m b) 40 m c) 16 m d) 10.49 m

4 مساحة سباعي منتظم طول عامده 6cm وطول ضلعه 7.5cm هو:

a) $157.5\ cm^2$ b) $28.5\ cm^2$ c) $28\ m^2$ d) $9975\ m^2$



5 المساحة الجانبية للمخروط في الشكل المجاور هو:

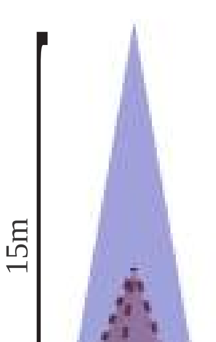
a) $360\pi\ cm^2$ b) $450\pi\ cm^2$ c) $369\pi\ cm^2$ d) $1640\pi\ cm^2$

6 حجم هرم قاعدته مربعة طول كل ضلع 18cm وارتفاعه 20cm .

a) $2160cm^3$ b) $120\ cm^3$ c) $260\ cm^3$ d) $134\ cm^3$

7 المساحة الكلية لمخروط مساحة قاعدته $25\pi cm^2$ وارتفاعه 12cm هو:

a) $108\pi\ cm^2$ b) $27\pi\ cm^2$ c) $208\pi\ cm^2$ d) $85\pi\ cm^2$



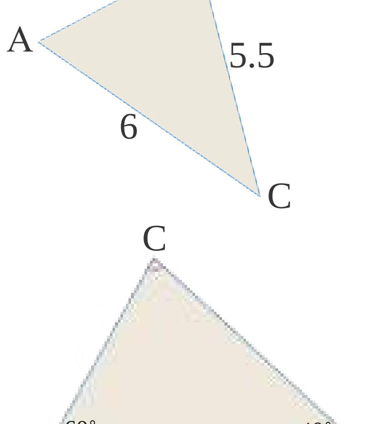
8 الفرق بين حجم المخروطين هو:

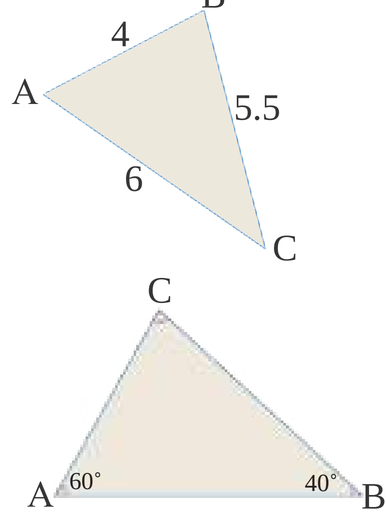
a) $27\pi\ m^3$ b) $75\pi\ m^3$ c) $48\pi\ m^3$ d) $21\pi\ m^3$

الدرس [2-5] المثلثات

Triangles

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:





1 رتب الزوايا من الاصغر الى الاكبر في المثلث المجاور:

a $m\angle C, m\angle A, m\angle B$

b. $m\angle A, m\angle B, m\angle C$

c. $m\angle B, m\angle C, m\angle A$

d. $m\angle C, m\angle B, m\angle A$

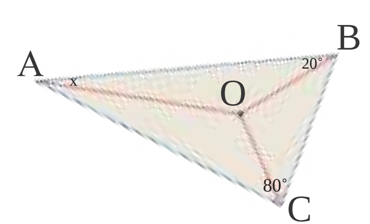
2 رتب الاضلاع من الاطول الى الاقصر في المثلث المجاور:

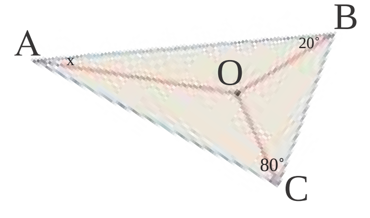
a. $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$

b. $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{AC}$

c. $\overline{AC}, \overline{BC}, \overline{AB}$

d. $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{BC}$





3 اذا كانت O هي نقطة التقاء منصفات زوايا المثلث ABC في الشكل المجاور فان قيمة x هي:

a) 20°   b) 40°   c) 30°   d) 50°

4 المثلث ABC فيه $\overline{AD}, \overline{CE}$ قطعتان متوسطتان تلتقيان في نقطة O، AD=36cm, CE=24cm، فان قيمة $\overline{OE}$ ، علماً ان رأس المثلث هو النقطة B هي:

a) 8 cm   b) 24 cm   c) 16 cm   d) 12 cm

5 في السؤال (4) قيمة $\overline{AO}$ هي:

a) 6 cm   b) 12 cm   c) 24 cm   d) 14 cm

6 نسبة التشابه بين المثلثين ADB,ACB هي:

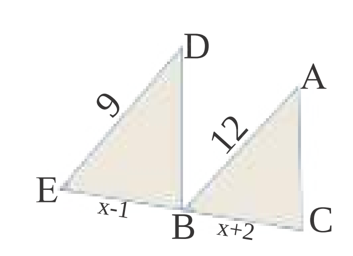
a. $\frac{8}{7}$ b. $\frac{7}{8}$

c. 7   d. 8

7 اذا كانت المثلثان DEB,ABC متشابهان وكانت الزاويتان.

$m\angle ABC \cong m\angle DEB$

فأن قيمة x هي:

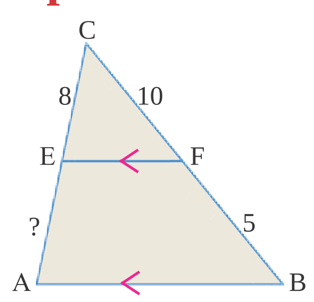


a) 8   b) 12   c) 10   d) 6

الدرس [5-3] التناسب والقياس في المثلثات

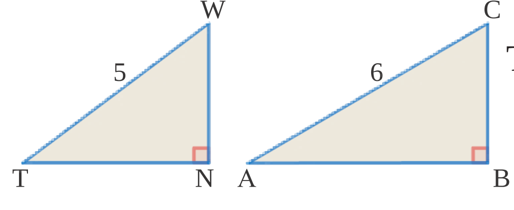
Proportion and Measure in Triangles

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:



1 اذا كان $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$ فأن طول القطعة المستقيمة AE هو:

a) 4 b) 5 c) 2 d) 10

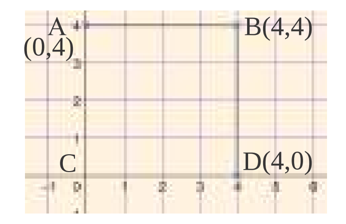


2 اذا كان $\triangle ACB \sim \triangle TWN$ ، اذا علمت ان ارتفاع المثلث TWN هو (3)، فأن مساحة المثلث ABC هي:

a) 42.3 cm^2 b) 43.2 cm^2 c) 40.2 cm d) 10.8 cm^2

تم رسم الصورة بعد تحويلها بتناسب هندسي نسبته $\frac{4}{3}$ فتكون كما في الرسم المجاور:

اختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (4-7):



3 احداثيات النقطة A قبل التحويل هي:

a) (0,3) b) (3,0) c) (3,3) d) (0,0)

4 احداثيات النقطة B قبل التحويل هي:

a) (0,3) b) (3,0) c) (3,3) d) (0,0)

5 احداثيات النقطة C قبل التحويل هي:

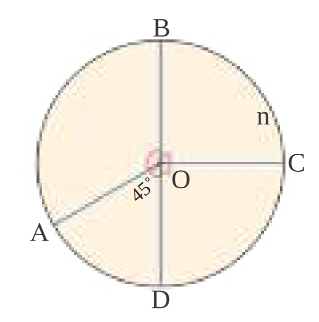
a) (0,3) b) (3,0) c) (3,3) d) (0,0)

6 احداثيات النقطة D قبل التحويل هي:

a) (0,3) b) (3,0) c) (3,3) d) (0,0)

الدرس [4-5] الدائرة

The Circle



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (4-1):

1 قياس الزاوية $\angle AOB$ هو:

a) 180° b) 135° c) 90° d) 45°

2 قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو:

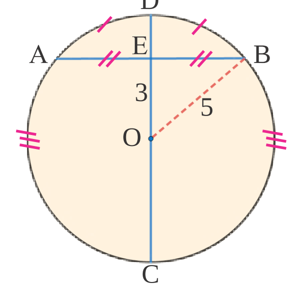
a) 180 b) 90 c) 135 d) 45

3 قياس القوس $\overset{\frown}{ABC}$ هو:

a) 180 b) 90 c) 225 d) 135

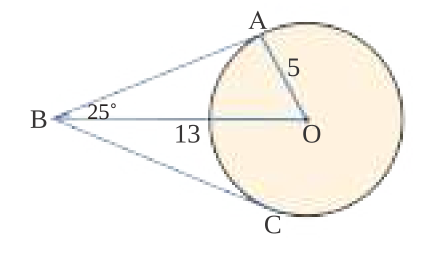
4 قياس القوس $\overset{\frown}{BC}$ هو:

a) 90 b) 42 c) 45 d) 135



5 طول الوتر AB في الشكل المجاور هو:

a) 12 b) 10 c) 6 d) 8



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (7-6):

6 قياس $\angle AOB$ هو:

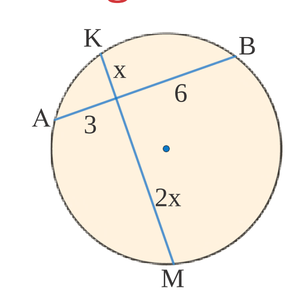
a) 115° b) 120° c) 65° d) 90°

7 طول القطعة المستقيمة BC هو:

a) 10 b) 14 c) 12 d) 5

الدرس [5-5] المثلث والدائرة، القطع المستقيمة والدائرة

Triangle and Circle Line Segments and Circle



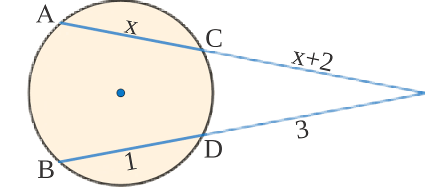
انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (2-1):

1 قيمة x هي:

a) 2 b) 6 c) 9 d) 3

2 طول الوتر $\overline{MK}$ هو:

a) 12 b) 9 c) 5 d) 4



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (5-3):

3 قيمة x هي:

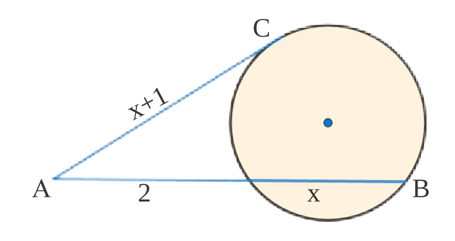
a) 2 b) 3 c) 1 d) 4

4 طول $\overline{BM}$ هو:

a) 4 b) 6 c) 5 d) 2

5 طول $\overline{AM}$ هو:

a) 4 b) 2 c) 6 d) 3



انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (8-6):

6 قيمة x هي:

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 0

7 طول المماس هو:

a) $\sqrt{2}+1$ b) $\sqrt{3}+1$ c) 4 d) $\sqrt{5}+1$

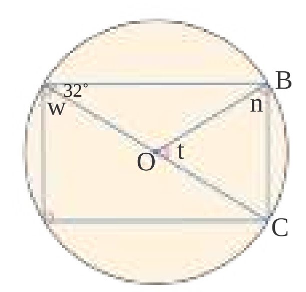
8 طول $\overline{AB}$ هو:

a) $\sqrt{3}+6$ b) $\sqrt{3}+2$ c) $\sqrt{3}+5$ d) $\sqrt{3}+4$

الدرس [5-6] الزوايا والدائرة

Angles and Circle

انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (1-3):



1 قياس الزاوية W هو:

a) 45° b) 30° c) 90° d) 32°

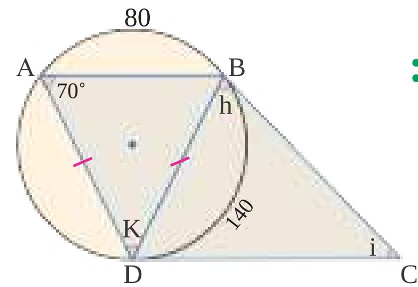
2 قياس الزاوية t هو:

a) 45° b) 64° c) 32° d) 48°

3 قياس الزاوية n هو:

a) 45° b) 64° c) 32° d) 58°

انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للاسئلة (4-6):



4 قياس الزاوية h هو:

a) 70° b) 72° c) 90° d) 80°

5 قياس الزاوية i هو:

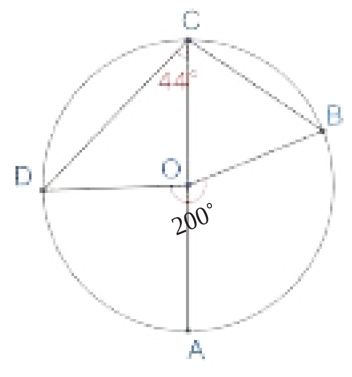
a) 39° b) 70° c) 40° d) 45°

6 قياس الزاوية k هو:

a) 70° b) 30° c) 40° d) 78°

انظر الشكل المجاور واختر الإجابة الصحيحة للسؤال (7):

7 قياس القوس $\overset{\frown}{AB}$ هو:



a) 56 b) 28 c) 65 d) 82

الدرس [1-6] تصميم دراسة مسحية وتحليل نتائجها

Design a Survey Study and Analysis its Results

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أي المقاييس هو الانسب للبيانات التالية:

8, 8, 12, 11, 15, 15, 16, 21, 23, 27, 31, 70.

a) المدى b) المنوال c) الوسيط d) الوسط الحسابي

2 أي المقاييس هو الانسب للبيانات التالية:

2, 3, 4, 5,6, 7.

a) المدى b) المنوال c) الوسيط d) الوسط الحسابي

3 أي المقاييس هو الانسب للبيانات التالية:

18, 1, 3, 16, 23, 3, 2.

a) المدى b) المنوال c) الوسيط d) الوسط الحسابي

4 المدى للبيانات الآتية: 18, 22, 24, 32, 18, 24 هو:

a) 18 b) 32 c) 14 d) 50

5 اي المقياس ليس من مقاييس النزعة المركزية؟

a) المدى b) المنوال c) الوسيط d) الوسط الحسابي

6 القيمة المتطرفة لهذه البيانات: 3, 5, 6, 5, 5, 3, 30, 4

a) 3 b) 5 c) 5 d) 30

7 يكون الوسيط هو انسب مقاييس النزعة المركزية للبيانات التي:

a) توجد قيم متطرفة توجد فجوات كبيرة وسطها
b) لاتوجد قيم متطرفة لاتوجد فجوات كبيرة وسطها
c) توجد قيم متطرفة لاتوجد فجوات كبيرة وسطها
d) لاتوجد قيم متطرفة توجد فجوات كبيرة وسطها

Multiple Choice



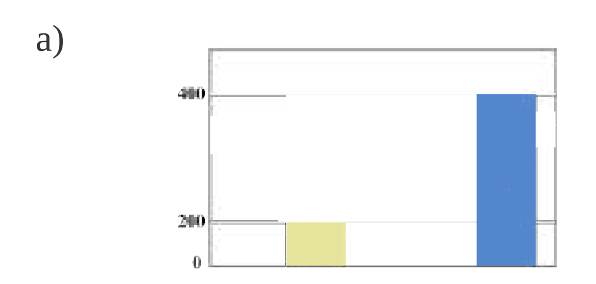
الدرس [6-2] البيانات والاحصاءات المضلّلة

Graphs and Misleading Statics

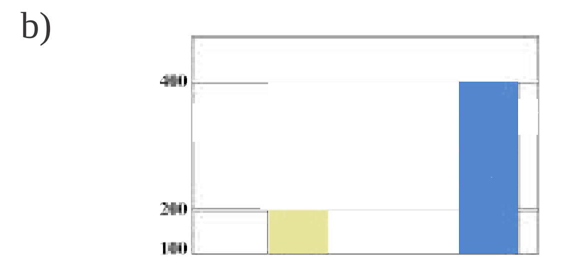
اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 اي رسم بياني هو الافضل في تمثيل بيانات معينة:

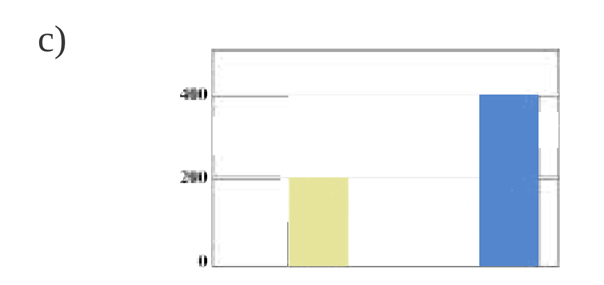
a)



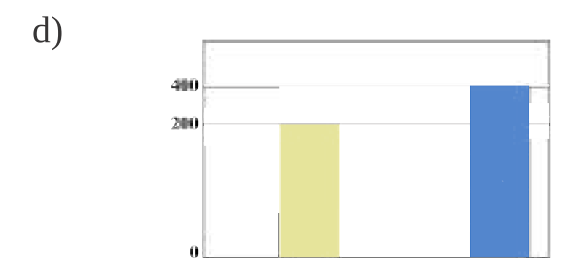
b)



c)



d)



2 الرسم البياني يكون مضلّل:

a) يبدأ من الصفر والفترات غير متساوية
b) لايبدأ من الصفر والفترات غير متساوية
c) لايبدأ من الصفر والفترات متساوية
d) يبدأ من الصفر والفترات متساوية

3 في استطلاع شمل 6 مدرسين حول الدوام، افاد 4 منهم انهم يفضلون الدوام الصباحي. كتب المستطلع ان: (يفضل 2 مدرس من كل 3 مدرسين الدوام الصباحي) لماذا يعد هذا الاعلان مضلّلاً؟

a) العينة كبيرة جداً
b) يجب ان تشمل العينة عمال بناء
c) العينة صغيرة جداً
d) يجب ان تكون الجملة (يفضل به مدرس من كل مدرسين)

4 في محل تجاري عرض نوع من الاجبان على 12 شخص لتقويمه قبل عرضه، ابدى 6 منهم اعجابهم بالمنتج، بناءً على ذلك صرح المنتج «ان المنتج جيد لان نسبة الذين فضلوه كانت 6 الى 3».

a) البيانات غير مضلّلة لان نسبة 6 الى 3 نسبة كبيرة
b) البيانات غير مضلّلة لان نسبة الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين
c) البيانات مضلّلة رغم ان عدد الذين اعجبوا بالجبنة ضعف عدد الباقين
d) البيانات مضلّلة لان العينة التي اختيرت متوسطة الحجم

الدرس [3-6] التباديل والتوافيق

Permutation and Compilation

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 القيمة العددية للمقدار $(5!-3!)(0!)$ تساوي:

a) 2 b) 0 c) 114 d) ليس اياً منها

2 قيمة C_1^{51} تساوي:

a) 1 b) 51 c) 50 d) ليس اياً منها

3 قيمة P_0^{100} تساوي:

a) 100 b) 100! c) 0 d) 1

4 عدد طرق تشكيل لجنة رباعية من 5 اشخاص لكل منهم وظيفة خاصة:

a) P_4^5 b) 5! c) 4! d) C_4^5

5 قيمة المقدار $\frac{n!}{(n-2)!}$ تساوي:

a) n! b) (n-2)! c) n (n-1)! d) n(n-1)

6 عدد طرق اختيار 5 اسئلة من ورقة امتحان تحتوي على 7 اسئلة هو:

a) 7 b) 5 c) 2! d) 21

7 القيمة العددية للمقدار $\frac{(8-3)!}{(3+2)!}$ هي:

a) 4! b) 3! c) 2! d) 1!

8 قيمة المقدار $C_0^n + P_0^n$ تساوي:

a) 1 b) 2 c) 0 d) 0

الدرس [6-4] الاحتمال والتجريبي والاحتمال والنظري

Experimental Probability and Theoretical Probability

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 اذا كان E_1,E_2 حدثين متنافيين فان $P(E_1 or E_2)$ تساوي:

a) $P(E_1) - P(E_2)$ b) $P(E_1) \times P(E_2)$ c) $P(E_1) + P(E_2)$ d) $\frac{P(E_1)}{P(E_2)}$

2 سجل احمد 20 اصابة للهدف من 25 محاولة، أي نسبة مئوية للاحتمال التجريبي ان يسجل احمد الهدف في المحاولة التالية؟

a) 50% b) 60% c) 70% d) 80%

3 اطلقت تمارة مؤشر القرص المقابل مرة واحدة، أي نسبة مئوية للاحتمال النظري ان يدل المؤشر على اللون الابيض.



a) 35% b) 30% c) 12.5% d) 20%

4 عند رمي حجري النرد مرة واحدة، احتمال الحصول على عددين مجموعهما 3 او حاصل ضربهما 3 هو:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{9}$ c) $\frac{2}{3}$ d) 1

5 E_1, E_2 حدثان متنافيان، اذا كان $P(E_1 or E_2) = \frac{5}{6}$ وان $P(E_2) = \frac{2}{3}$ فان $P(E_1)$ يساوي:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{1}{5}$

6 عند رمي حجري النرد، احتمال الحصول على عددين مجموعهما 13 هو:

a) 3 b) 2 c) 1 d) 0

الدرس [6-5] الاحداث المركبة

Compound Events

اختر الإجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 E_1, E_2 حدثان مستقلان، حيث $P(E_1) = 0.3$ وان $P(E_2) = 0.9$ فان احتمال حدوث E_1,E_2 معاً هو:

a) 1.2 b) 0.6 c) 0.27 d) 0.3

2 رمى مصطفى حجر نرد وقطعة نقود، احتمال ظهور رقم اكبر من 5 على حجر النرد والكتابة على قطعة النقود هو:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{12}$ d) 3

3 صندوق فيه 5 كرات حمر، 4 كرات خضر.
E_1: سحب كرة حمراء، E_2: سحب كرة خضراء من دون اعادة الحمراء. فان احتمال حدوثهما معاً هو:

a) $\frac{10}{9}$ b) $\frac{5}{18}$ c) $\frac{19}{18}$ d) $\frac{1}{18}$

4 E_1, E_2 حدثان مترابطان فان احتمال وقوعهما معاً هو:

a) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ after } E_1)$
b) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) + P(E_2 \text{ before } E_1)$
c) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2 \text{ after } E_1)$
d) $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_1 \text{ after } E_2)$

5 العلاقة $P(E_1 \text{ and } E_2) = P(E_1) \times P(E_2)$ بين الحدثان E_1,E_2 حيث هما:

a) لاتوجد علاقة بينهما b) مستقلان c) مترابطان d) غير ذلك

6 E_1,E_2 حدثان متنافيان حيث: $P(E_1) = 0.15$, $P(E_2) = 0.45$ ، فأن احتمال حدوث E_1 او E_2 هو:

a) 0.0675 b) 3 c) 0.6 d) 0.3

المحتوى

الفصل الأول : العلاقات والمتباينات في الأعداد الحقيقية

الفصل الثاني : المقادير الجبرية

الفصل الثالث : المعادلات

الفصل الرابع : الهندسة الاحداثية

الفصل الخامس : الهندسة والقياس

الفصل السادس : الاحصاء والاحتمالات